MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE, TÜBINGEN
R. NEVANLINNA, HELSINKI
E. SCHMIDT, BERLIN
F. K. SCHMIDT, HEIDELBERG
H. WIELANDT, TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

56. BAND 4. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 28. OKTOBER 1952)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1952

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27, **R. Nevanlinna,** Zürich/Schweiz, Hadlaubstr. 45
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6, **E. Schmidt,** Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut.

Geschäftsführender Herausgeber:
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebs-Vertretung des Verlages im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W.C.2.

56. Band **Inhalt** 4. (Schluß-)Heft

Seite

Haken, Dr. H., Erlangen, Math. Institut der Universität: Zum Identitätsproblem bei Gruppen 335

Rund, Dr. H., Freiburg i. Br., Math. Institut der Universität: The Theory of Subspaces of a Finsler Space. I. 363

Gaschütz, Dr. W., Kiel, Math. Institut der Universität: Über den Fundamentalsatz von Maschke zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen 376

Hellwig, Dr. G., Berlin-Charlottenburg, Klaus-Groth-Str. 4: Das Randwertproblem eines linearen elliptischen Systems 388

Barner, Dr. M., Freiburg i. Br., Math. Institut der Universität: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare 409

Weyl, Prof. Dr. H., Zürich (Schweiz), Bergstr. 27: Errata. 442

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 335—362 (1952).

Zum Identitätsproblem bei Gruppen.

Von

Hermann Haken in Erlangen.

Einleitung.

Das *Identitätsproblem* bei abstrakten, durch Erzeugende und definierende Relationen erklärten Gruppen verlangt, ein Verfahren anzugeben, durch das man in endlich vielen Schritten von einem beliebig vorgegebenen Wort entscheiden kann, ob es auf Grund der definierenden Relationen gleich der Einheit ist. Unter dem *teilweise erweiterten* Identitätsproblem bezüglich gewisser Erzeugender soll hingegen im folgenden die Frage danach verstanden werden, ob sich ein vorgelegtes Wort mit Hilfe der Relationen in eines verwandeln läßt, das nur noch aus ganz bestimmten, stets fest vorgegebenen „gewissen" Erzeugenden besteht.

Während das Identitätsproblem in einer Anzahl von Einzelfällen [1—4; 7; 9—11][1]) auf verschiedenartige, meist stark auf das betreffende Beispiel zugeschnittene Weise behandelt wurde, sind bisher nur drei Methoden bekannt geworden, die speziell dazu entwickelt sind, das Identitätsproblem in möglichst umfassenden Klassen von Gruppen zu lösen. Einmal wäre in dieser Richtung als wichtiges Hilfsmittel der Satz von Schreier [12] über das freie Produkt von Gruppen mit vereinigten Untergruppen zu nennen, der es erlaubt, das Identitätsproblem in der gesamten Gruppe (dem „freien Produkt") zu lösen, wenn man in den einzelnen Gruppen das teilweise erweiterte Identitätsproblem bezüglich der Erzeugenden der zu vereinigenden Untergruppen lösen kann. Von diesem Hilfsmittel wird auch hier viel Gebrauch gemacht werden. Als zweite Methode wäre der Dehnsche Kalkül zu erwähnen, mit dessen Hilfe es W. Magnus [6; 8] gelang, das Identitätsproblem bei Gruppen mit einer definierenden Relation allgemein, d.h. ohne Einschränkung über die Gestalt der definierenden Relation zu lösen. Diesen Kalkül auch zur Lösung des Identitätsproblems bei Gruppen mit mehreren definierenden Relationen anzuwenden, scheint jedoch nur unter sehr starken Einschränkungen möglich zu sein [5]. Als dritte und wohl am weitesten reichende Methode verdient die Siebmethode von V. A. Tartakovskij [13] Beachtung, die mir allerdings erst nach Beendigung der vorliegenden Arbeit bekannt wurde. Wenngleich auch sie noch nicht zur vollständigen Lösung des Identitätsproblems geführt hat, so erlaubt sie — wie

[1]) [n] bedeutet die n-te Arbeit im Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Tartakovskij in zwei nachfolgenden Arbeiten [14; 15] zeigte — das Identitätsproblem in einer ziemlich breiten Klasse von Gruppen zu lösen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun ebenfalls der Versuch unternommen, eine „direkte Methode" zur Lösung des Identitätsproblems zu entwickeln. Die Methode selbst hat mit der von Tartakovskij den einen Gedanken gemeinsam, die Lösung des Identitätsproblems auf den Nachweis zurückzuführen, daß es im wesentlichen darauf ankommt, aus endlich vielen effektiv angebbaren Fällen den zutreffenden durch ein ebenfalls finites Verfahren herauszufinden. Darin ist aber auch das Gemeinsame der beiden Methoden erschöpft, denn bereits bei den „endlich vielen Fällen" handelt es sich um verschiedene Dinge, bei Tartakovskij nämlich um die Wörter von bestimmten „Alter", die auf Grund der definierenden Relationen der Gruppe gleich Eins sind, bei der hier entwickelten Methode jedoch um Wörter von ganz bestimmter Struktur aus gewissen Erzeugenden. Dementsprechend unterscheiden sich die Behandlungsweisen wesentlich voneinander, so daß es nützlich erscheint, auf einige der daraus entspringenden Unterschiede im Resultat hinzuweisen. Diese Unterschiede zeigen sich nicht allein darin, daß die in den Arbeiten von Tartakovskij und der vorliegenden Untersuchung behandelten Gruppentypen sich überschneiden, d.h. sowohl von Tartakovskij Gruppen erfaßt werden, die durch die im folgenden beschriebene Methode nicht behandelt werden können, als sich auch unter den hier angeführten Fällen jeweils Gruppen befinden, die den Voraussetzungen bei Tartakovskij nicht genügen. Während bei Tartakovskij alle definierenden Relationen den gleichen Voraussetzungen unterliegen, wird bei der hier entwickelten Methode von gewissen Untersystemen von definierenden Relationen nur vorausgesetzt, daß man in den entsprechenden Gruppen, die zu diesen definierenden Relationen gehören, das Identitätsproblem lösen kann. Diese Voraussetzung, die — wie leicht zu sehen — schwächer ist, als wenn man über alle Relationen das gleiche voraussetzt, dürfte einen gewissen Vorzug bedeuten, der sich beispielsweise in folgendem äußert: Man kann Gruppen mit Vertauschungsrelationen behandeln, wenn alle übrigen Relationen den sonst gemachten Voraussetzungen genügen, da ja bei Vertauschungsrelationen das Identitätsproblem lösbar ist. Durch die Tartakovskijschen Sätze dagegen werden solche Gruppen nicht erfaßt, da Vertauschungsrelationen seinen Voraussetzungen nicht genügen. Ein weiterer günstiger Umstand bei der hier angegebenen Methode ist, daß sich dabei auch die Lösung des teilweise erweiterten Identitätsproblems bezüglich gewisser Erzeugender ergibt und Aussagen über die definierenden Relationen zwischen den Erzeugenden dieser Untermengen gemacht werden können. Dadurch entsteht die Möglichkeit, auch Gruppen zu behandeln, die sich als freies Produkt (mit vereinigten isomorphen Untergruppen) aus den hier behandelten Gruppen mit anderen auffassen lassen, in denen man ebenfalls das teilweise erweiterte Identitätsproblem bezüglich der zu vereinigenden Untergruppen

lösen kann. Dabei ist also vorausgesetzt, daß als zu vereinigende Untergruppen gerade die oben erwähnten Untermengen mit den dazugehörigen definierenden Relationen fungieren.

Für wertvolle Ratschläge bei der Abfassung der Arbeit bin ich Herrn Prof. Dr. W. Specht zu großem Dank verpflichtet.

I. Bezeichnungen und Hilfsbetrachtungen.

Die in der Arbeit benutzten Bezeichnungen seien hier kurz zusammengestellt[2]):

Einzelne *Erzeugende* werden durch kleine lateinische Buchstaben mit Indizes bezeichnet, also etwa durch $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$, während deren *Gesamtheiten* durch kleine lateinische Buchstaben ohne Index wiedergegeben werden, im vorliegenden Beispiel also durch a, b. Die *Exponenten* der in den Wörtern auftretenden Erzeugenden werden in kleinen griechischen Buchstaben geschrieben. Ein *Wort* aus den Erzeugenden $a, b, \ldots$ wird mit $W(a, b, \ldots)$, seine *Normalform* — sofern man im betreffenden Falle von einer solchen sprechen kann — mit $N(a, b, \ldots)$ bezeichnet. *Bestandteile* von Wörtern werden durch A, B, C, D, X, Y (eventuell unter Angabe der darin auftretenden Erzeugenden als Argument) wiedergegeben. Das Wort $(A)(A)\ldots(A)$ mit α darin auftretenden (A) wird durch $(A)^\alpha$ abgekürzt. Die linke Seite der *definierenden Relation* $R_i(a) = 1$ wird — sofern nicht über die Gestalt von R_i sowieso eine genauere Aussage gemacht wird — durch R_i, die *Gesamtheit* solcher R_i durch R bezeichnet. Da Mißverständnisse nicht zu befürchten sind, wird auch eine definierende Relation $R_i = 1$ kürzer allein durch den Buchstaben R_i bezeichnet. *Bestandteile* der linken Seite einer definierenden Relation werden durch P_i, Q_i, U_i, V_i (nötigenfalls mit Angabe des Arguments), deren *Gesamtheiten* durch die gleichen Buchstaben ohne Index gekennzeichnet. Eine *Folgerelation* aus den definierenden Relationen R wird durch $F_i(R)$, eine *Gesamtheit* von solchen Folgerelationen durch $F(R)$ (ohne Index) wiedergegeben, während die in den Folgerelationen auftretenden *Transformierenden* durch S und T bezeichnet werden. Die *Gesamtheit* von Wörtern oder von Bestandteilen von Wörtern bzw. von definierenden Relationen oder von linken Seiten von definierenden Relationen wird auch durch geschweifte Klammern symbolisiert, so etwa die Gesamtheit der Wörter $W_i(a)$ mit $i = 1, \ldots, n$ durch $\{W_i(a)\}_1^n$. Eine *Gruppe* wird stets durch große deutsche Buchstaben, etwa $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{U}$ bezeichnet, wobei im Argument zuerst die Erzeugenden, dann nach einem Semikolon die linken Seiten der definierenden Relationen angegeben sind. Beispielsweise wird die durch die Erzeugendengesamtheiten a, b und durch die definierenden Relationen $R(a, b) = 1$ gegebene Gruppe durch $\mathfrak{G}(a, b; R(a, b))$ symbolisiert. Die *Gleichheit* in der *freien* Gruppe, d.h. die Gleichheit bis auf identische Umformungen soll durch $\equiv$, die

[2]) Die Erklärung der verwendeten Begriffe findet man etwa bei [10].

Gleichheit auf Grund der *definierenden Relationen* der Gruppe in der üblichen Weise durch $=$ bezeichnet werden.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ sei gegeben durch zwei Systeme von Erzeugenden $a = a_1, \ldots, a_m$ und $b = b_1, \ldots, b_n$, zwischen denen erstens die Relationen $R^{(1)}(a)$ und $R^{(2)}(b)$ bestehen mögen. Die von den a bzw. b erzeugten Gruppen mit den definierenden Relationen $R^{(1)}$ bzw. $R^{(2)}$ mögen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ heißen. Die Teilmengen $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, a_{\mu_3}, \ldots$ bzw. $b_{\nu_1}, b_{\nu_2}, b_{\nu_3}, \ldots$ der Erzeugenden a bzw. b mögen Untergruppen $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ von $\mathfrak{G}_1$ bzw. von $\mathfrak{G}_2$ erzeugen. $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ seien isomorph, und zwar so, daß die Abbildung $a_{\mu_\lambda} \leftrightarrow b_{\nu_\lambda} (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ induziert. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze dann zweitens außer $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$ noch die definierenden Relationen

$$a_{\mu_\lambda} = b_{\nu_\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

$\mathfrak{G}$ heißt *freies Produkt mit vereinigten Untergruppen* $\mathfrak{U}_1$ *und* $\mathfrak{U}_2$; falls $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ nur aus dem Einheitselement bestehen, heißt $\mathfrak{G}$ *freies Produkt von* $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$. Man setzt noch $a_{\mu_\lambda} = b_{\nu_\lambda} = c_\lambda$ und bezeichnet mit A_1, A_2, ... bzw. B_1, B_2, ... bzw. C_1, C_2, ... irgendwelche Wörter aus den a bzw. b bzw. c. Dann gilt der

Satz von Schreier[3]). *Jedes Wort W aus $\mathfrak{G}$ läßt sich in einer der Formen*

$$C; \quad A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_k B_k$$

darstellen, wobei A_1 und B_k gleich Eins sein dürfen, aber im übrigen keines der Wörter A und B gleich einem Worte C ist, falls nicht W überhaupt gleich C ist. Eine solche Darstellung heiße Normalform. Ist $W \neq C$ und

$$W = \bar{A}_1 \bar{B}_1 \ldots \bar{A}_l \bar{B}_l$$

eine zweite Normalform für W, so gilt $k = l$ und

$$\bar{C}_1 A_1 = \bar{A}_1 C_1, \ldots, \bar{C}_l A_l = \bar{A}_l C_l$$
$$\bar{C}'_1 B_1 = \bar{B}_1 C'_1, \ldots, \bar{C}'_l B_l = \bar{B}_l C'_l,$$

wobei zu beachten ist, daß die c_λ sowohl als Erzeugende a_{μ_λ} wie als b_{ν_λ} aufgefaßt werden können[4]).

Daraus folgt der

Hilfssatz 1. *Ist W ein beliebiges Wort aus der Gesamtgruppe $\mathfrak{G}$ und kann man in $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ entscheiden, ob sich ein Wort A oder B in eines aus den c verwandeln läßt, so kann man von W entscheiden, ob es sich in ein Wort A (oder in ein Wort B) verwandeln läßt.*

Beweis. Ist

$$W \equiv A_1 B_1 \ldots A_M B_M$$

[3]) Die Formulierung dieses Satzes sowie des daraus folgenden Hilfssatzes und dessen Beweis sind fast wörtlich von Magnus [8] übernommen.

[4]) Der Schreiersche Satz läßt, wie hier nur erwähnt werden soll, eine Übertragung auf mehrere zu vereinigende Gruppen zu. (Vgl. etwa Magnus [7].)

die vorgelegte, nicht notwendig als Normalform vorausgesetzte Darstellung von W mit Hilfe der Erzeugenden a und b, so untersuche man, falls $M > 1$, ob eines der Wörter A oder B sich in ein Wort aus den c verwandeln läßt. Ist dies etwa für A_m der Fall, so ist — auf Grund der definierenden Relationen $R^{(1)}$ — $A_m = C_m$, also gleich einem Wort in den b, und man kann

$$B_{m-1} A_m B_m = B'_m$$

setzen, wobei B'_m ein neues Wort in den b ist. Jetzt wende man auf die so erhaltene Darstellung von W:

$$W = A_1 B_1 \dots A_{m-1} B'_m A_{m+1} \dots A_M B_M$$

das gleiche Verkürzungsverfahren an. Man kommt dann nach höchstens M Schritten auf eine Normalform von W und von dieser läßt sich nach dem Satz von SCHREIER sofort entscheiden, ob sie sich in ein Wort aus den a oder b überführen läßt.

Für die folgenden Untersuchungen sind noch die beiden Bemerkungen von Interesse:

1. Zwei Wörter sind dann und nur dann gleich, wenn ihre Normalformen gleich sind.

2. In einem freien Produkt (mit vereinigten Untergruppen) folgen alle Relationen zwischen den Erzeugenden einer Gruppe $\mathfrak{G}_i$ aus den definierenden Relationen von $\mathfrak{G}_i$ allein $(i = 1, 2)$.

Hilfssatz 2. *In der Gruppe*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\left(b, s, t, x;\ R(b, x),\ \{(s_\lambda P_\lambda(b, x))^{\alpha_\lambda}\}_1^l, \{t_\mu^{-1} Q_\mu(b, x)\}_1^m;\ \alpha_\lambda > 1\right)$$

mit den Erzeugenden

$$b = b_1, \dots, b_k; \quad s = s_1, \dots, s_l; \quad t = t_1, \dots, t_m; \quad x = x_1, \dots, x_n$$

läßt sich ein Wort $W(b, s, t, x)$ dann und nur dann in eines der Form $W'(b, s, t)$ verwandeln, wenn sich in der Gruppe

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'(b, s^*, x; R(b, x), (s^*)^\alpha)$$

mit den Erzeugenden

$$b;\ s^* = s_1^*, \dots, s_l^*;\ x$$

das Wort $W(b, s^* P(b, x)^{-1}, Q(b, x), x)$ in ein Wort der Form $W'(b, s^* P(b, x)^{-1}, Q(b, x))$ verwandeln läßt, also in ein Wort, das die Erzeugenden x nur in ganz bestimmten Verbindungen, nämlich innerhalb der P und Q enthält.

Von Interesse ist natürlich dieser Hilfssatz nur, wenn die P und Q auch tatsächlich die x oder einige dieser Erzeugenden enthalten. Mit anderen Worten lautet die Behauptung auch: Die Identität

$$\text{(I)} \qquad W(b, s, t, x) \equiv W'(b, s, t)\, F_0(R, t^{-1} Q, (sP)^\alpha)$$

in der Gruppe $\mathfrak{G}$ zieht die Identität

$$\text{(II)} \qquad W(b, s^* P^{-1}, Q, x) \equiv W'(b, s^* P^{-1}, Q)\, \overline{F}_0(R, (s^*)^\alpha)$$

in der Gruppe $\mathfrak{G}'$ nach sich und umgekehrt.

Beweis. Bei der Substitution

$$t = Q, \qquad s = s^* P^{-1}$$

geht die Identität (I) in die Identität (II) über. Ist andererseits $W(b, s^* P^{-1}, Q, x)$ in $\mathfrak{G}'$ auf Grund der definierenden Relationen $R(b, x)$ und $(s^*)^\alpha$ in ein Wort verwandelbar, in dem sich die Erzeugenden x zusammen mit den anderen Erzeugenden derart zu Ausdrücken P und Q zusammenfassen lassen, daß gilt:

$$W(b, s^* P^{-1}, Q, x) \equiv W'(b, s^* P^{-1}, Q)\, F_0'(R(b, x), (s^*)^\alpha),$$

so erkennt man vermöge der Substitution

$$s^* = s P,$$

daß in der Gruppe

$$\mathfrak{G}'' = \mathfrak{G}''(b, s, x;\ R(b, x),\ (s P(b, x))^\alpha)$$

die folgende Identität besteht:

(III) $$W(b, s, Q, x) \equiv W'(b, s, Q)\, F_1'(R(b, x),\ (s P)^\alpha).$$

Diese Identität besteht nun auch in der Gruppe $\mathfrak{G}$, da diese Gruppe aus der Gruppe $\mathfrak{G}''$ einfach durch Hinzunahme der definierenden Relationen $t^{-1} Q$ hervorgeht. Man ersetzt nun in (III) Q durch t und zeigt, daß dies lediglich auf ein Weglassen von Folgerelationen von $t^{-1} Q$ hinausläuft. Betrachtet man dazu etwa W' (bei W verläuft der Beweis analog), so sei von links her Q_i das erste Q in W', d.h. W' habe die Form

$$W' \equiv W_1(b, s)\, Q_i\, W_2(b, s, Q).$$

Dann gilt offenbar die Identität:

$$W' \equiv W_1 t_i\, W_2\, W_2^{-1} t_i^{-1} Q_i\, W_2.$$

In W_2 sei Q_k das erste von links her vorkommende Q, d.h. W_2 habe die Form

$$W_2 \equiv W_3(b, s)\, Q_k\, W_4(b, s, Q).$$

Dann gilt hier die Identität:

$$W_2 \equiv W_3 t_k\, W_4\, W_4^{-1} t_k^{-1} Q_k\, W_4.$$

So fortfahrend erkennt man, daß sich W' auf die Form

$$W'(b, s, t)\, F_2(t^{-1} Q)$$

bringen läßt. Führt man dasselbe auch auf der linken Seite der Identität (III) durch und bringt die dabei auftretende Folgerelation auf die rechte Seite, so entsteht, wie behauptet, die Identität der Form (I). Denn da alle x nur in Ausdrücken der Form Q vorkommen und diese aus dem Wort eliminiert wurden, kommen also in W' keine solchen Erzeugenden x mehr vor.

Als Spezialfall ergibt sich noch:

Ein Wort $W(b, s, t, x)$ aus $\mathfrak{G}$ ist auf Grund der definierenden Relationen $R(b, x)$, $(sP)^\alpha$, $t^{-1}Q$ dann und nur dann gleich Eins, wenn das Wort $W(b, s^* P^{-1}, Q, x)$ auf Grund der definierenden Relationen $R(b, x)$, $(s^*)^\alpha$ gleich Eins ist.

Hilfssatz 2a. *Ist ein Wort $W(b, x)$ auf Grund der definierenden Relationen $R(b, x)$, $t^{-1}Q$, $(sP)^\alpha$ gleich Eins, so ist es schon auf Grund der Relationen $R(b, x)$ gleich Eins.*

Ersetzt man nämlich in der Identität

$$W(b, x) \equiv F_0\left(R(b, x),\ t^{-1}Q,\ (sP)^\alpha;\ T(b, s, t, x)\right)$$

t durch Q und s durch P^{-1}, so ändert sich die linke Seite nicht. Auf der rechten Seite dagegen kommt $F_1\left(R(b, x);\ S(b, x)\right)$ zu stehen. Dies war die Behauptung, die man mit anderen Worten auch so aussprechen kann:

Alle Relationen zwischen den Erzeugenden b und x, die aus den Relationen $R(b, x)$, $t^{-1}Q$, $(sP)^\alpha$ folgen, ergeben sich schon aus den $R(b, x)$ allein.

Hilfssatz 2b. *Kann man in $\widetilde{\mathfrak{G}}\left(b, x;\ R(b, x)\right)$ das Identitätsproblem lösen, so kann man in*

$$\mathfrak{G}\left(b, s, t, x;\ R(b, x),\ t^{-1}Q,\ (sP)^\alpha\right)$$

sogar entscheiden, ob sich ein Wort dieser Gruppe in eines der Gestalt $W(b, x)$ verwandeln läßt.

Wie sich aus einer leichten Modifikation des eben bewiesenen Hilfssatzes 2 ergibt, braucht man dazu nur in der Gruppe

$$\mathfrak{G}'\left(b, s^*, x;\ R(b, x),\ (s^*)^\alpha\right)$$

zu entscheiden, ob sich das Wort $W(b, s^* P^{-1}, Q, x)$ in eines der Form $\overline{W}(b, x)$ verwandeln läßt. $\mathfrak{G}'$ ist aber freies Produkt aus

$$\mathfrak{G}_0\left(b, x;\ R(b, x)\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}_1\left(s_1^*;\ (s_1^*)^{\alpha_1}\right), \ldots \mathfrak{G}_l\left(s_l^*;\ (s_l^*)^{\alpha_l}\right).$$

Da man in jeder dieser Gruppen das Identitätsproblem lösen kann, kann man nach Hilfssatz 1 entscheiden, ob sich das vorgelegte Wort in eines aus $\mathfrak{G}_0$ allein verwandeln läßt.

Es sei nun eine Gruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\left(b, s, t, x;\ R(b),\ R'(x),\ \{(s_\lambda P_\lambda(b, x))^{\alpha_\lambda}\}_1^l,\ \{t_\mu^{-1} Q_\mu(b, x)\}_1^m,\ \alpha_\lambda > 1\right)$$

vorgelegt.

Folgen in ihr alle Relationen zwischen den Erzeugenden b, s und t schon aus $R(b)$ allein, so heißt dies: Die b, s und t erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{U}$, die als einzige definierende Relationen die $R(b)$ besitzt, oder noch anders ausgedrückt: Ist ein Wort $W(b, s, t)$ in $\mathfrak{G}$ gleich Eins, dann ist es schon in $\mathfrak{U}$ gleich Eins. $\mathfrak{U}$ läßt sich aber als freies Produkt aus $\mathfrak{U}_0\left(b;\ R(b)\right)$ und $\mathfrak{U}_1(s, t)$ auffassen. Ist daher ein Wort aus $\mathfrak{U}$ gleich Eins,

so muß es sich bei der SCHREIERschen Konstruktion auf die Weise verkürzen lassen, daß einige seiner b-haltigen Teilwörter auf Grund von $R(b)$ gleich Eins sind, die Erzeugenden s, t sich identisch fortheben lassen. Es läßt sich also unter der Voraussetzung, daß alle Relationen zwischen b, s und t aus den definierenden Relationen $R(b)$ allein folgen, ein Wort $W(b, s, t)$, das in $\mathfrak{G}$ gleich Eins ist, sicher auf die Weise in Eins verwandeln, daß man es als in dem freien Produkt aus $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1$ liegend betrachtet und dort nach der in Hilfssatz 1 beschriebenen Weise in Eins umformt.

Geht man vermöge der Substitution

$$t = Q(b, x), \qquad s^* = sP(b, x)$$

von der zuerst angeführten Gruppe $\mathfrak{G}$ zu der Gruppe

$$\mathfrak{G}'(b, s^*, x;\ R(b),\ R'(x),\ (s^*)^\alpha)$$

über, so ist wegen Hilfssatz 2 zunächst ein Wort $W(b, s, t)$ aus $\mathfrak{G}$ dann und nur dann gleich Eins, wenn das Wort $W(b, s^*P^{-1}, Q)$ in $\mathfrak{G}'$ gleich Eins ist. Nun war eben festgestellt worden, daß in einem Worte der Form $W(b, s, t)$, das in $\mathfrak{G}$ gleich Eins ist, sich bei Durchführung der SCHREIERschen Konstruktion die s bzw. t gegenseitig fortheben. Für das Wort $W(b, s^*P^{-1}, Q)$ bedeutet dies, daß es — sofern es gleich Eins ist — sich stets auf die Weise in Eins verwandeln läßt, daß sich die Q bzw. s^*P^{-1} in ihrer Gesamtheit, und zwar jeweils unzerstört wegheben, ohne daß man dabei $R'(x)$ zu Hilfe nimmt.

Man betrachte nun umgekehrt die Gruppe $\mathfrak{G}'$: In ihr seien die P und Q folgendermaßen beschaffen:

(Bedingung B). *Ein beliebiges Wort der Form $W(s^*P^{-1}, Q, b)$ soll sich nicht auf Eins verkürzen lassen, wenn es sich nicht schon in der folgenden Weise zu Eins machen läßt: Bei Anwendung der* SCHREIER*schen Konstruktion*[5]*) verwandle man diejenigen b-haltigen Teilwörter, die nicht aus P oder Q stammen und bei denen es möglich ist, in Eins, dann fasse man zusammenstoßende Q bzw. s^*P^{-1} mit gleichen Indizes und entgegengesetzten Exponenten zu Eins zusammen — dabei heben sich also Q und s^*P^{-1} unzerstört weg —, fasse dann wieder zusammenstoßende b-haltige Teilwörter, die nicht aus P oder Q stammen, zusammen, verwandle sie, wenn möglich, in Eins und so fort.*

Damit die P bzw. Q der Bedingung B genügen, ist offenbar notwendig, daß die P bzw. Q sich in kein Wort verwandeln lassen, das nur aus Erzeugenden b besteht: Wäre nämlich etwa $Q = A(b)$, so würde $W(Q, b) \equiv QA(b)^{-1} = 1$ sein entgegen der Forderung B. Und ebenso für P: Wäre etwa $P_1 = B(b)$, so würde gelten: $W(s_1^*P_1, b) \equiv (s_1^*P_1^{-1}B(b))^{\alpha_1} = (s_1^*)^{\alpha_1} = 1$. Hinreichende Bedingungen für P und Q zur Erfüllung der Forderung B werden in dem Kapitel II gegeben.

[5]) Man hat es hier mit einem freien Produkt aus $\mathfrak{G}_1(b; R(b))$, $\mathfrak{G}_2(x; R'(x))$ und $\mathfrak{G}_3(s^*; (s^*)^\alpha)$ zu tun!

Man geht nun wieder zur Gruppe $\mathfrak{G}$ wie im Hilfssatz 2 zurück und erhält wie dort:

$$W_{\mathfrak{G}'}(s^* P^{-1}, Q, b) \to W_{\mathfrak{G}}(s, t, b).$$

Nun war eben festgestellt worden, daß das Wort $W_{\mathfrak{G}'}$, wenn es gleich Eins ist, sich stets auf die Weise verkürzen läßt, daß sich bei der SCHREIERschen Konstruktion die Q bzw. $s^* P^{-1}$ gegenseitig, und zwar unzerstört wegheben. Für das entsprechende Wort $W_{\mathfrak{G}}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ bedeutet dies: Ist das Wort $W(s, t, b)$ gleich Eins auf Grund der definierenden Relationen $R(b)$, $R'(x)$, $(sP)^x$, $t^{-1}Q$, wobei die P und Q von der oben verlangten Beschaffenheit sind, so läßt es sich stets auf die Weise zu Eins machen, daß man das Wort als in dem freien Produkt aus $\mathfrak{U}_0(b; R(b))$, $\mathfrak{U}_1(s, t)$ liegend betrachtet und dann gemäß der SCHREIERschen Konstruktion zu Eins verkürzt. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß sich das Wort schon auf Grund der definierenden Relationen $R(b)$ allein zu Eins machen läßt. Zusammenfassend kann man also sagen:

Statt in $\mathfrak{G}$ zu beweisen, daß alle Relationen zwischen den Erzeugenden b, s, t aus den Relationen $R(b)$ allein folgen, genügt es, in $\mathfrak{G}'$ zu zeigen: Wenn jedes beliebige Wort der Form $W(b, s^* P^{-1}, Q)$ in $\mathfrak{G}'$ sich nicht derart zu Eins verkürzen läßt, daß sich jedes Q_μ gegen Q_μ, jedes $s_\lambda^* P_\lambda^{-1}$ gegen $s_\lambda^* P_\lambda^{-1}$ und zwar jeweils unzerstört forthebt, so läßt sich dieses Wort überhaupt nicht in Eins verwandeln.

II. Behandlung eines speziellen Gruppentypus.

Die im ersten Abschnitt erzielten Ergebnisse gestatten unter sogleich zu nennenden Voraussetzungen die Behandlung des folgenden Gruppentypus:

$$\mathfrak{G}(x, a, y;\ R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ R^{(3)}(y)\ ^6)$$

$$\{(P'_\varkappa(x, a)\, U_\varkappa(a, y))^{\gamma_\varkappa}\}_1^k, \qquad \{Q'_\mu(x, a)\, V_\mu(a, y)\}_1^m, \qquad \alpha_\varkappa > 1)\ ^7)\ ^8)$$

bei dem sich folgendes zeigen läßt:

(A) *Man kann entscheiden, ob sich ein Wort*

(α) *in eines der Form $W(a, x)$ bzw.*

(β) *in eines der Form $W(a, y)$ bzw.*

(γ) *in eines der Form $W(x, y)$ verwandeln läßt.*

---

[6]) Dabei können auch einige oder alle dieser definierenden Relationen $\equiv 1$ sein, also als nicht vorhanden angesehen werden.

[7]) Hier ist auch der Fall zugelassen, daß entweder die Relationen mit $\alpha > 1$ oder mit dem „Exponenten" $= 1$ identisch Eins sind, also unberücksichtigt bleiben können. Im zweiten Falle lassen sich die Voraussetzungen über die $R(x)$ und $R(a)$ leicht etwas lockern.

[8]) Bei definierenden Relationen der Form $(U)^\alpha$ darf man stets $\alpha > 0$ annehmen, denn mit $(U)^\alpha$ ist auch $(U)^{-\alpha}$ definierende Relation.

(B) *Alle Relationen*
(α) *zwischen den a und x folgen aus* $R^{(1)}(x)$ *und* $R^{(2)}(a)$ *allein,*
(β) *zwischen den a und y aus* $R^{(3)}(x)$ *und* $R^{(2)}(a)$ *allein,*
(γ) *zwischen den x und y aus* $R^{(1)}(x)$ *und* $R^{(3)}(y)$ *allein*[9]).

(C) *Man kann das Identitätsproblem lösen.*

Die Voraussetzungen haben dabei folgenden Wortlaut:

1. In den Gruppen $\tilde{\mathfrak{G}}_1(x; R^{(1)}(x))$, $\tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$, $\tilde{\mathfrak{G}}_3(y; R^{(3)}(y))$ ist das Identitätsproblem lösbar.

2. In dem freien Produkt $\mathfrak{G}'$ aus $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_2$[10]) besitzen die Ausdrücke P' und Q' bereits eine Minimalzahl von Teilwörtern aus den einzelnen Gruppen $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_2$, sind also schon in der Normalform. Sie können in der Gestalt $Q' \equiv A'(a)\,\overline{Q}(x,a)\,A''(a)$ angenommen werden, wobei $\overline{Q}$ von Wörtern in x berandet sein soll, während $P'^{-1} \equiv \overline{P}(x,a)\,\overline{A}(a)$ angenommen werden darf, wobei $\overline{P}$ mit einem Wort in x enden soll, also $\overline{P}$ in der Normalform noch x enthalten soll. Die weiteren Voraussetzungen beziehen sich auf die Teilwörter $\overline{P}$ und $\overline{Q}$[11]), wobei es zur Entlastung der Bezeichnungsweise zweckmäßig ist, zu neuen Q überzugehen:

Es sei $\quad Q_\mu \equiv \overline{Q}_\mu \quad$ für $\mu = 1, \ldots, m$ und

$$Q_\mu \equiv \overline{Q}_{\mu-m}^{-1} \quad \text{für} \quad \mu = m+1, \ldots, 2m.$$

Es wird nun weiter verlangt:

Q_μ besitze eine Normalform der Gestalt $^*Q_\mu \hat{Q}_\mu Q_\mu^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

Das Wort $Q_{\mu_1} Q_{\mu_2}$ mit $\mu_1 \neq \mu_2 - m$ (bzw. $\mu_2 \neq \mu_1 - m$) darf sich auf Grund der definierenden Relationen $R^{(1)}(x)$ und $R^{(2)}(a)$ nur bis auf

$$^*Q_{\mu_1} \hat{Q}_{\mu_1} \tilde{Q}_{\mu_1,\mu_2} \hat{Q}_{\mu_2} Q_{\mu_2}^* \quad \text{mit} \quad \tilde{Q}_{\mu_1,\mu_2} = Q_{\mu_1}^* \, ^*Q_{\mu_2}$$

verkürzen lassen.

Wir unterscheiden nunmehr zwei verschiedene Forderungen:

2a. Der „Kern" $\hat{Q}_\mu$ sei für alle $\tilde{Q}_{\mu,\mu_2}$ bzw. $Q_{\mu_1,\mu}$ stets der gleiche[12]) und habe für alle μ die folgende Form:

$$A_{1,\mu}(a)\, B_\mu(a,x)\, A_{2,\mu}(a)\ ^{13}).$$

[9]) Dies besagt in $\mathfrak{G}$ mehr als die Aussage: In $\mathfrak{G}$ folgen alle Relationen zwischen den x bzw. y aus $R^{(1)}(x)$ bzw. $R^{(3)}(y)$ allein. Entsprechend in den beiden anderen Fällen (α) und (β).

[10]) In $\mathfrak{G}'$ kann man wegen Hilfssatz 1 und der Voraussetzungen über $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_2$ insbesondere das Identitätsproblem lösen.

[11]) Auch in der späteren Beweisführung werden wir zur Vereinfachung die Ausdrücke P', Q' in der Gestalt $Q' = \overline{Q}(x,a)$ und $P'^{-1} = \overline{P}(x,a)$ voraussetzen und danach durch eine einfache Reduktion den allgemeinen Fall erledigen.

[12]) Für verschiedene μ kann der Kern dagegen verschieden sein.

[13]) Die einzelnen A, B, C, D sollen dabei stets unverkürzbar sein; wegen der angegebenen Bedingung über die Begrenzung folgt, daß auch die gesamten Ausdrücke unverkürzbar sind.

Darin kann $B = 1$ sein, sonst werde B jedoch von x-Zeichen begrenzt. Dagegen seien $A_1, A_2 \neq 1$ (und, wenn $B = 1$ ist, sei $A_1 A_2 \neq 1$).

Die ${}^*Q_\mu$ sollen die Form $A_\mu(a, x)\, B'_\mu(x)$ besitzen. Dabei sei $B'(x) \neq 1$, $A(a, x)$ kann gleich Eins sein, sonst werde es rechts von einem Ausdruck in a begrenzt. (Links ist es nach einer früheren Voraussetzung von einem Ausdruck in x berandet.)

$\widetilde{Q}_{\mu_i, \mu_k}$ habe die Form $A_{1, \mu_i, \mu_k}(x)\, B_{\mu_i, \mu_k}(a, x)\, A_{2, \mu_i, \mu_k}(x)$. Dabei kann $B = 1$ sein, sonst werde es von Wörtern in a begrenzt, dagegen seien A_1, A_2 und, wenn $B = 1$ ist, sei auch $A_1 A_2 \neq 1$.

Q^*_μ habe die Form $A_\mu(x)\, B''_\mu(a, x)$, mit $A \neq 1$, dagegen kann $B = 1$ sein, andernfalls werde es links von einem Ausdruck in a begrenzt (und rechts von einem Ausdruck in x).

2b. Der „Kern" $\widehat{Q}_\mu$ sei für alle $\widetilde{Q}_{\mu, \mu_2}$ bzw. $\widetilde{Q}_{\mu_1, \mu}$ stets der gleiche[12]) und habe für alle μ die folgende Form

$$C_{1, \mu}(x)\, D_\mu(a, x)\, C_{2, \mu}(x)^{13}).$$

Hierbei ist auch $D = 1$ zugelassen, sonst soll D von a begrenzt werden. C_1 und C_2 sollen $\neq 1$ sein; wenn $D = 1$ ist, sei $C_1 C_2 \neq 1$.

${}^*Q_\mu$ habe die Form $A_\mu(a, x) \neq 1$, rechts begrenzt von einem Ausdruck in a (und, da $\overline{Q}$ von x-haltigen Teilwörtern begrenzt werden sollte, links von x-Zeichen berandet). $\widetilde{Q}_{\mu_1, \mu_2}$ habe die Form $B_{\mu_1, \mu_2}(a, x) \neq 1$, begrenzt von Ausdrücken in a, braucht hingegen nicht x zu enthalten.

Q^*_μ habe die Form $A'_\mu(a, x) \neq 1$, links begrenzt von einem Ausdruck in a (und rechts von einem Ausdruck in x).

Die Normalform von $P_\varkappa^{-1} Q_\mu$ laute: $(PQ)_{\varkappa, \mu}\, \widehat{Q}_\mu\, Q^*_\mu$. Im Falle 2a habe $(PQ)_{\varkappa, \mu}$ die Form $A_{\varkappa, \mu}(a, x)\, B_{\varkappa, \mu}(x)$, wobei A rechts von einem Ausdruck in a begrenzt werde, sofern A nicht gleich Eins ist; B sei $\neq 1$.

Im Falle 2b kann $(PQ)_{\varkappa, \mu} = 1$ sein, sonst werde es rechts von einem Ausdruck in a begrenzt.

Die $\widehat{Q}_\mu$ und Q^*_μ seien beidemale die gleichen wie früher. Über $P_\varkappa P_\mu$ und $P_\varkappa^{-1} P_\mu$ wird dagegen nichts vorausgesetzt.

3. In dem freien Produkt aus den Gruppen $\widetilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$ und $\widetilde{\mathfrak{G}}_3(y; R^{(3)}(y))$ sollen die *U und V* die Voraussetzungen wie die Q erfüllen. (Dabei ist also statt x bei den Q jetzt überall y zu nehmen), wobei auch hier wieder die Forderungen 3a und 3b zu unterscheiden sind.

Die eingangs aufgestellte Behauptung kann also etwa so zusammengefaßt werden:

In jeder Gruppe $\mathfrak{G}$, die die Voraussetzungen 1, 2a oder 2b, 3a oder 3b erfüllt, können die Aufgaben (A), (B), (C) gelöst werden.

Beweis. Vermöge der definierenden Relationen

$$\{s_\varkappa^{-1} U_\varkappa = 1\}_1^k, \qquad \{t_\mu V_\mu = 1\}_1^m$$

führt man die neuen Erzeugenden

$$s = s_1, s_2, \ldots, s_k; \qquad t = t_1, t_2, \ldots, t_m$$

ein. Nach Hilfssatz 2 ist es zur Lösung der Aufgaben (A), (B), (C) notwendig und hinreichend, die gleichen Probleme in der Gruppe

$$\hat{\mathfrak{G}}\,(x, a, y, s, t;\ R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ R^{(3)}(y),\ QV,\ (PU)^{\alpha},\ s^{-1}U,\ tV)$$

zu lösen. Man geht nun in $\hat{\mathfrak{G}}$ zu einem äquivalenten Relationensystem[14]) über

$$R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ R^{(3)}(y),\ t^{-1}Q,\ s^{-1}U,\ tV,\ (sP)^{\alpha}$$

über. Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich $\hat{\mathfrak{G}}$ in ein freies Produkt aus

$$\mathfrak{G}_1\,(x, a, s, t;\ R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ t^{-1}Q,\ (sP)^{\alpha})$$

und

$$\mathfrak{G}_2\,(y, a, s, t;\ R^{(3)}(y),\ R^{(2)}(a),\ tV,\ s^{-1}U)$$

mit der vereinigten Untergruppe $\mathfrak{U}\,(a, s, t;\ R^{(2)}(a))$ aufspalten. Zum Beweise hat man zu zeigen:

(D) In $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ kann man entscheiden, ob sich ein Wort aus $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ in eines der Untergruppe verwandeln läßt.

(E) In $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ folgen alle Relationen zwischen den Erzeugenden der zu vereinigenden Untergruppen $\mathfrak{U}_1$ aus $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ aus $\mathfrak{G}_2$ aus den Relationen $R^{(2)}(a)$ allein, d. h. die beiden Untergruppen sind isomorph.

Es läßt sich dann sofort feststellen (Folgerung F):

Da nach dem Satz von Schreier alle Relationen zwischen den Erzeugenden einer Gruppe $\mathfrak{G}_i$ aus den definierenden Relationen dieser Gruppe alleine folgen, ist zum einen wegen Hilfssatz 2a die Richtigkeit der Behauptungen (B) (α) und (B) (β) evident, während sich zum andern ergibt, daß es zur Lösung der Aufgaben (A) (α) und (A) (β) genügt, von dem vorgelegten Wort aus $\mathfrak{G}$ zu entscheiden, ob es sich in irgendein Wort aus $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ allein verwandeln läßt. Nach Hilfssatz 2b ergibt sich dann sofort die Lösung der Aufgaben (A) (α) und (A) (β). Damit und wegen [10]) ist die Lösung von (C) klar. Die Beweise zu (A) (γ) und (B) (γ) schließlich werden noch später erbracht.

Da der Typus der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ ein Spezialfall desjenigen der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ist[15]), braucht man zum Beweise von (D) und (E) nur die letztere Gruppe

[14]) Zwei Systeme von definierenden Relationen $R(b)$ und $R'(b)$ heißen äquivalent, wenn gilt:

$$R \equiv F(R') \quad \text{und} \quad R' \equiv F'(R).$$

Man sieht dann sofort:

Besteht in $\mathfrak{G}\,(b; R(b))$ eine Identität der Form

$$W(b) \equiv \overline{W}(b)\,\hat{F}_0(R),$$

dann besteht in dieser Gruppe auch die Identität

$$W(b) \equiv \overline{W}(b)\,\hat{F}_0(R')$$

und umgekehrt.

[15]) In $\mathfrak{G}_2$ treten nämlich keine definierenden Relationen mit $\alpha > 1$ auf.

zu betrachten. Durch die Substitution

$$\{t_\mu = Q_\mu\}_1^m, \qquad \{s_\varkappa^* = s_\varkappa P_\varkappa\}_1^k$$

gelangt man von $\mathfrak{G}_1$ zu der Gruppe

$$\mathfrak{G}_1^* \left(a, x, s^*;\ R^{(1)}(x),\ R^{(2)}(a),\ (s^*)^\alpha\right).$$

Wegen Hilfssatz 2 hat man in $\mathfrak{G}_1^*$ zu zeigen, daß man von einem beliebigen Wort dieser Gruppe feststellen kann, ob es sich auf die Form $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ bringen läßt. Ferner hat man auf Grund des Abschnittes I zu zeigen, daß sich ein Wort der Form $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ höchstens dann zu Eins verkürzen läßt, wenn es sich in der in Bedingung B beschriebenen Weise in Eins verwandeln läßt. Wie man sofort feststellt, läßt sich die Gruppe als freies Produkt aus den Gruppen

$$\tilde{\mathfrak{G}}_1 \left(x; R^{(1)}(x)\right), \qquad \tilde{\mathfrak{G}}_2 \left(a; R^{(2)}(a)\right), \qquad \mathfrak{G}_3 \left(s^*; (s^*)^\alpha\right)$$

auffassen. Um die Frage entscheiden zu können, ob sich ein beliebiges Wort dieser Gruppe in eines der Gestalt $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ verwandeln läßt, wird man im Anschluß an die Bemerkung 1 von Abschnitt I die Normalform beider Wörter aufsuchen und insbesondere die Normalformen der Wörter der eben angegebenen Gestalt zu klassifizieren suchen. Man geht dazu schrittweise vor und untersucht zuerst, ob sich eine allgemeine Regel für die Struktur der Normalform eines beliebigen Wortes der Form $W(a, Q)$ angeben läßt. Ein solches Wort hat also zunächst etwa die Gestalt

$$A_1(a)\, Q_{\mu_1} A_2(a)\, Q_{\mu_2} A_3(a) \ldots.$$

Es läßt sich eventuell zuerst dadurch verkürzen, daß einige der $A_i = 1$ sind. Stoßen dann Q_μ mit um $\pm m$ verschiedenen μ zusammen, so hebt sich dabei ein Q_μ gegen ein anderes $Q_{\mu'}$ weg und es tritt sicher eine Verringerung der x-Zeichen des Gesamtwortes ein, wobei zu beachten ist, daß sich dabei die betreffenden Q_μ unzerstört weggehoben haben. Das Wort werde nun in der angegebenen Weise weiter verkürzt, bis sich auf diese Art keine weitere Verkürzung mehr erzielen läßt. Unter den zu Anfang gemachten Voraussetzungen läßt sich nun zeigen, daß das untersuchte Wort, sofern es noch nicht bis auf Eins verkürzt worden ist, sich nicht mehr in Eins verwandeln läßt. Ferner läßt sich dann leicht eine Aussage über die Beschaffenheit der Normalform eines solchen Wortes machen. Man betrachte zu diesem Zwecke das in der angegebenen Weise verkürzte Wort, das aus Aggregaten der Form

$$A_i(a) \quad \text{und} \quad \prod_{j=1}^{k} Q_{\mu_j}$$

zusammengesetzt ist. Dabei sind die $A_i \neq 1$, denn sonst wäre ja noch eine weitere Verkürzung in der oben beschriebenen Weise möglich gewesen. Ebenso darf man annehmen, daß in dem Ausdruck

$$\prod_{j=1}^{k} Q_{\mu_j}$$

keine zwei Q_μ mit um $\pm m$ verschiedenen Indizes zusammenstoßen. Auf Grund der Voraussetzungen über die Q_μ stellt man mittels vollständiger Induktion fest, daß die Normalform von

$$\prod_{j=1}^{k} Q_{\mu_j} \quad \text{die Gestalt} \quad {}^*Q_{\mu_1} \prod_{j=1}^{k-1} (\hat{Q}_{\mu_j} \tilde{Q}_{\mu_j, \mu_{j+1}}) \hat{Q}_{\mu_k} Q^*_{\mu_k}$$

hat. Diese Normalform wird von Ausdrücken in x begrenzt. Ferner hat sie die wichtige Eigenschaft, daß in ihr mindestens so viele x-haltige Teilwörter vorkommen wie es in der Normalform $N(Q)$ „Kerne" gibt. Da die zwischen den betrachteten $N(Q)$ stehenden Ausdrücke $A_i \neq 1$ sind und außerdem die $N(Q)$ von x-Wörtern begrenzt werden, ist das Wort jetzt nicht weiter verkürzbar, also $\neq 1$. Man hat mithin eine unverkürzbare Form der Gestalt

$$A_1(a)\, N_1(Q)\, A_2(a)\, N_2(Q)\, A_3(a) \ldots A_l(a)$$

aufgefunden, in der die A_i und $N_i \neq 1$ sind (eventuell mit Ausnahme von A_1 und A_l). Nach dem Satz von Schreier ist dies aber schon *die* Normalform des vorgelegten Wortes $W(a, Q)$.

Um nun festzustellen, ob die Normalform N' eines *beliebigen* Wortes der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ übereinstimmt mit der Normalform N eines Wortes der Gestalt $W(a, Q)$, bestimme man zunächst die Zahl Z der in N' stehenden x-haltigen Teilwörter, kurz x-Wörter genannt. Da nach dem Satz von Schreier insbesondere die Zahl der x-Wörter eindeutig bestimmt ist, kommen nur solche Normalformen N in Betracht, in denen diese Anzahlbedingung erfüllt ist. Da aber wegen der oben gemachten Bemerkung in den Normalformen $N(Q)$ und damit auch in der Gesamtnormalform von $W(a, Q)$ höchstens so viele Kerne vorkommen wie x-Wörter vorhanden sind, kommen nur Normalformen mit höchstens Z Kernen in Frage. Man hat nun alle möglichen Normalformen einer gegebenen Zahl von Kernen aufzusuchen. Beispielsweise hat bei *einem* Kern die Normalform die Gestalt $A_1 Q_\mu A_2$, wobei die A_i auch $= 1$ sein können. Bei zwei Kernen hat man von den Kernen $\hat{Q}_\mu$ je zwei, nötigenfalls auch gleiche, herauszugreifen und zu bilden:

1. $A_1 Q_{\mu_1} A_2 Q_{\mu_2} A_3$, $\quad A_2 \neq 1$, jedoch $A_1, A_3 = 1$ zugelassen.
2. $A_1 {}^*Q_{\mu_1} \hat{Q}_{\mu_1} \tilde{Q}_{\mu_1, \mu_2} \hat{Q}_{\mu_2} Q^*_{\mu_2} A_2$, $\quad A_1, A_2 = 1$ erlaubt, $\mu_1 \neq \mu_2 \pm m$.

Allgemein läßt sich sagen: Es gibt nur endlich viele Möglichkeiten, diese Kerne anzuordnen[16]). Es ist aber auch nur auf endlich viele Weisen möglich, die Zwischenräume zwischen den Kernen auszufüllen[16]). Ent-

[16]) Es seien nämlich etwa Z_0 Kerne zugelassen und $2m$ verschiedene Kerne vorhanden. Da, wie oben dargelegt, zwischen den Kernen höchstens noch drei andere Ausdrücke stehen können, sind weniger als $4(Z_0+1)$ Stellen zu besetzen. Für die Besetzung kommen höchstens (Z_0+1) A_i in Betracht und außerdem $(4m+4m^2)$ andere Glieder ${}^*Q_\mu$, Q^*_μ, $\tilde{Q}_{\mu,\nu}$ neben den Kernen. Es gibt also keinesfalls mehr als $(Z_0+1+6m+4m^2)^{4(Z_0+1)}$ Möglichkeiten, voneinander verschiedene Normalformen mit einer vorgegebenen Zahl von Kernen aufzubauen, wobei die A_i noch beliebig, aber $\neq 1$ sind. (Das am Anfang bzw. Schluß stehende A darf auch $= 1$ sein.)

weder stammen die benachbarten Kerne aus den gleichen $N(Q)$, dann steht zwischen ihnen $\tilde{Q}_{\mu_i, \mu_{i-1}}$ oder sie stammen aus verschiedenen (jedoch benachbarten) $N(Q)$, dann steht zwischen ihnen $Q^*_{\mu_i} A(a) {}^*Q_{\mu_k}$, wie man sofort der Struktur der Normalform $N(a, Q)$ entnimmt. Über $A(a)$ läßt sich dabei nur sagen, daß es von Eins verschieden ist. Von allen diesen Normalformen, die zunächst einmal tatsächlich aufzusuchen sind, kommen aber in die engere Auswahl nur diejenigen, bei denen die gleiche Zahl von x-Wörtern vorkommt wie in der vorgelegten Normalform N'. (Gibt es keine solche Normalform N, dann ist man schon fertig; das Wort läßt sich also nicht in eines der verlangten Gestalt verwandeln.) Ferner müssen bei Übereinstimmung zweier Normalformen insbesondere die x-Wörter beider Normalformen in der gleichen Reihenfolge übereinstimmen. Da man in $\mathfrak{S}_1(x; R^{(1)}(x))$ das Identitätsproblem lösen kann, kann man auch entscheiden, welche der vorgelegten Normalformen auch noch dieser Bedingung genügen. Es seien dies die Normalformen $N_1, \ldots, N_j$. Man untersuche nun, ob man in N_1 die noch unbestimmt gelassenen A_i so festlegen kann, daß das Wort $N'^{-1} N = 1$ wird. N_1 habe die Form

$$A_1 N_1(Q) A_2 N_2(Q) \ldots N_n(Q) A_{n+1} \quad \text{mit} \quad A_i \neq 1 \quad \text{für} \quad i \neq 1,\ i \neq n+1.$$

Schreibt man hierin die $N_i(Q)$ auch in ihre x- bzw. a-haltigen Bestandteile aus, so hat $N_1(a, Q)$ die Gestalt

$$A_1(a) \underbrace{C_1(x) A_2'(a) C_3(x) \ldots C_{l_1}(x)}_{N_1(Q)} A_2(a) \ldots$$

$N'(a, x)$ habe die Form

$$B_1(a) D_1(x) B_2(a) D_2(x) \ldots D_{n'}(x) B_{n'+1}(a).$$

Wie man schon weiß, gilt für die C bzw. D aus $N_1(a, Q)$ bzw. N': $D_i(x) = C_i(x)$ [auf Grund der definierenden Relationen $R^{(1)}(x)$]. Nach dem Satz von Schreier sind die beiden Normalformen dann und nur dann gleich, wenn außerdem auch die A_i bzw. A_i' mit den B_i [auf Grund der definierenden Relationen $R^{(2)}(a)$] übereinstimmen. Dies führt also auf die zu erfüllenden Beziehungen:

$A_1 = B_1$, stets erfüllbar, da ja A_1 beliebig wählbar ist.

$A_2' = B_2$. Hier sind A_2' und B_2 fest vorgegeben:

B_2, weil es aus der Normalform eines fest vorgegebenen Wortes stammt, A_2', weil es aus der wohlbestimmten Normalform $N_1(Q)$ stammt. Entsprechend müssen die Relationen

$$A_i' = B_i \quad \text{für} \quad i = 3, \ldots, l_1 - 1$$

für fest vorgegebene A_i und B_i erfüllt werden. Dagegen ist in

$$A_2 = B_{l_1}$$

A_2 wieder frei wählbar, die Gleichung also sicher zu erfüllen. (Der Bedingung $A_2 \neq 1$ wird dabei sicher genügt, denn sonst wäre ja $B_{l_1} = 1$ und N' wäre gar nicht die Normalform.) Die Relationen

$$A_{l_1+i}' = B_{l_1+1+i} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, l_2$$

sind hingegen wieder für fest vorgegebene A' und B zu erfüllen, und so fort. Entweder lassen sich alle diese Relationen erfüllen, dann stimmen die beiden Normalformen überein und man hat damit festgestellt, daß das vorgelegte Wort sich in eines der Gestalt $W(a, Q)$ verwandeln läßt. Oder die Relationen sind nicht sämtlich erfüllt, dann kommt also $N_1(a, Q)$ nicht in Betracht und man kann dann in der gleichen Weise die weiteren N_i untersuchen.

Man kann auf diese Weise in endlich vielen Schritten (da ja auch die Entscheidung, ob die obigen Beziehungen erfüllt sind, in endlich vielen Schritten zu erreichen ist) feststellen, ob N' gleich einem der N_i ist. Es gibt nur endlich viele solcher N_i, also ist das Verfahren endlich.

Es läßt sich nun auch leicht der Fall[17]) behandeln, daß die Q von der Form $A'\overline{Q}A''$ sind. Zunächst kann man ein Wort $W(a, Q)$ wegen $Q = A'\overline{Q}A''$ auch in der Form $\overline{W}(a, \overline{Q})$ schreiben, denn man hat ja:

$$\begin{aligned} W(a, Q) &\equiv A_1 Q_{\mu_1} A_2 Q_{\mu_2} A_3 \dots \\ &\equiv A_1 A'_{\mu_1} \overline{Q}_{\mu_1} A''_{\mu_1} A_2 A'_{\mu_2} \overline{Q}_{\mu_2} A''_{\mu_2} A_3 \dots \\ &\equiv \bar{A}_1 \overline{Q}_{\mu_1} \bar{A}_2 \overline{Q}_{\mu_2} \bar{A}_3 \dots \equiv \overline{W}(a, \overline{Q}). \end{aligned}$$

Damit ist aber klar, wie man die Normalform von $W(a, Q)$ findet. Man braucht ja nur die Q in $\overline{Q}$ wie angegeben umzuschreiben und kann dann wie früher verfahren. Man hat nun noch [im Hinblick auf die Betrachtungen im Abschnitt I und die Behauptung (E)] zu untersuchen, wann sich ein solches Wort $W(a, Q)$ auf Eins verkürzen läßt. Dazu denke man sich das Wort $W(a, Q)$ in der durch Bedingung B festgelegten Weise verkürzt. Es läßt sich dann wieder zeigen: Ist das Wort dann noch nicht auf Eins verkürzt, so läßt es sich überhaupt nicht in Eins verwandeln. W sei also in der angegebenen Weise bis auf

$$A_1 \prod_{i=1}^{l_1} Q_{\mu_i} A_2 \dots A_k$$

verkürzt, wobei $A_i \neq 1$ ist ($i \neq 1$ und $\neq k$), oder, wenn die Q_{μ_i} in der obigen Weise aufgelöst werden:

$$A_1 \prod_{i=1}^{l_1} (A'_{\mu_i} \overline{Q}_{\mu_i} A''_{\mu_i}) A_2 \dots .$$

Dabei darf es nicht vorkommen, daß in Π zwei aufeinanderfolgende $\overline{Q}_{\mu_i}$ mit $\mu_{i-1} = \mu_i \pm m$ vorkommen, sonst wäre ja noch eine Verkürzung in der angeführten Weise möglich gewesen. Innerhalb der $\overline{Q}$ können zunächst keine Verkürzungen eintreten, denn diese Ausdrücke sollten ja schon in der Normalform sein. Da diese $\overline{Q}$ von x-Wörtern berandet sind, können Verkürzungen nur noch vorkommen, wenn $A''_{\mu_i} A'_{\mu_{i+1}} = 1$ oder $A''_{\mu_i} A_j A'_{\mu_{i+1}} = 1$ ist. Ist keiner dieser Ausdrücke gleich Eins, so ist die Behauptung schon bewiesen. Ist jedoch etwa $A''_{\mu_i} A'_{\mu_{i+1}} = 1$, dann treffen von den

[17]) Vgl. Bemerkung in [11]).

Randpunkten her $\overline{Q}_{\mu_i}$ und $\overline{Q}_{\mu_{i+1}}$ mit $\mu_i \neq \mu_{i+1} \pm m$ zusammen (für $\mu_i = \mu_{i-1} \pm m$ wäre ja eine Verkürzung im früheren Sinne möglich gewesen). Ist etwa $A''_{\mu_i} A_j A'_{\mu_{i-1}} = 1$, so kann bei den zusammenstoßenden $\overline{Q}_\mu$ ebenfalls nicht $\mu_i = \mu_{i-1} \pm m$ sein, sonst wäre ja $A''_{\mu_i} = A^{-1}_{\mu_{i-1}}$ und daher schon $A_j = 1$ und das Wort hätte sich ebenfalls in der zuvor beschriebenen Weise verkürzen lassen. Macht man nun alle diese $A''_{\mu_i} A'_{\mu_{i+1}}$ bzw. $A''_{\mu_i} A_j A'_{\mu_{i-1}}$, bei denen es möglich ist, zu Eins, so ist das Wort aus Aggregaten der Form

$$A_i \neq 1 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{l} \overline{Q}_{\mu_i}$$

zusammengesetzt, wobei in dem Produkt nie zwei $\overline{Q}_\mu$ mit um $\pm m$ voneinander verschiedenen Indizes zusammenstoßen. Hier ist aber der Anschluß an die früheren Überlegungen gewonnen. Dort wurde ja gezeigt, daß ein Wort der eben angegebenen Gestalt sich nicht mehr auf Eins verkürzen läßt, womit die oben aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Die beiden Probleme (D) und (E) lassen sich nun auch leicht allgemein lösen. Dazu untersuche man — zum Beweis der zweiten Behauptung — die Verkürzungsmöglichkeiten bei einem Wort der Form $W(a, s^* P^{-1}, Q)$. Soweit es durchführbar ist, werde das Wort in der in Bedingung B beschriebenen Weise verkürzt. Nach endlich vielen Schritten erhält man dann einen Ausdruck, der nicht mehr in der geforderten Weise verkürzt werden kann. Treten in diesem Ausdruck keine s^*-Zeichen mehr auf, hat er mithin die Form $\overline{W}(a, Q)$, so ist er nach früheren Überlegungen nicht mehr auf Eins zu verkürzen, falls $\overline{W}(a, Q) \neq 1$, die Behauptung also in diesem Falle richtig. Man hat nun noch den Fall zu betrachten, daß das in der angegebenen Weise verkürzte Wort auf die Gestalt $W'(a, s^* P^{-1}, Q)$ gebracht wurde. Es ist genau wie früher zu zeigen, daß sich dieses Wort überhaupt nicht mehr in Eins verwandeln läßt. W' habe etwa die Form

$$B_1(Q, a)\, s^*_{\varkappa_1} P^{-1}_{\varkappa_1} s^*_{\varkappa_2} P^{-1}_{\varkappa_2} \dots s^*_{\varkappa_l} P^{-1}_{\varkappa_l} B_2(Q, a).$$

Man stellt sofort fest, daß der Ausdruck

$$s^*_{\varkappa_i} P^{-1}_{\varkappa_i} s^*_{\varkappa_{i+1}} P^{-1}_{\varkappa_{i+1}}$$

unverkürzbar ist. Denn nach Voraussetzung lassen sich die $P_\varkappa$ in kein Wort verwandeln, das die Erzeugenden x nicht mehr enthält, lassen sich also erst recht nicht zu Eins machen. Außerdem entnimmt man den definierenden Relationen $(s^*_\varkappa)^{\alpha_\varkappa}$ mit $\alpha_\varkappa > 1$ sofort, daß auch $s^*_\varkappa \neq 1$ ist. Ferner gilt offenbar (freies Produkt!):

$$(s^*_\varkappa)^{-1} s^*_\lambda \neq 1 \qquad (\varkappa \neq \lambda).$$

Natürlich sind auch die inversen Ausdrücke

$$P_{\varkappa_i} (s^*_{\varkappa_i})^{-1} P_{\varkappa_{i+1}} (s^*_{\varkappa_{i+1}})^{-1} \quad \text{bzw.} \quad s^*_\varkappa (s^*_\lambda)^{-1} \qquad (\varkappa \neq \lambda)$$

nicht verkürzbar bzw. von Eins verschieden. Ebensowenig läßt sich

$$B(a, Q) \cdot s_\varkappa^* P_\varkappa^{-1} \quad \text{und} \quad P_\varkappa^* (s_\varkappa^*)^{-1} \cdot B(a, Q)$$

an der Stelle des Punktes verkürzen. Es bleibt also zu untersuchen, welche Verkürzungsmöglichkeiten innerhalb des Teilwortes $B(a, Q)$ und an der Stelle des Punktes in

$$(\alpha) \qquad B(a, Q) \cdot P_\varkappa (s_\varkappa^*)^{-1}$$

$$(\beta) \qquad s_\varkappa^* P_\varkappa^{-1} \cdot B(a, Q) \cdot P_\lambda (s_\lambda^*)^{-1}$$

$$(\gamma) \qquad s_\varkappa^* P_\varkappa^{-1} \cdot P_\lambda (s_\lambda^*)^{-1} \qquad (\varkappa \neq \lambda)$$

bestehen. Es wird also untersucht, in welcher Weise sich die zwischen aufeinanderfolgenden $s_\varkappa^*$ und s_λ^* stehenden Ausdrücke verkürzen lassen. Um das Ergebnis gleich vorwegzunehmen:

Zwischen gleichen $s_\varkappa^*$ bleiben stets Ausdrücke in a oder x (oder beiden) stehen, die ungleich Eins sind. Zwischen verschiedenen $s_\varkappa^*$ hingegen brauchen derartige Ausdrücke nicht aufzutreten. Das Wort bekommt also die Gestalt:

$$\prod_{i=1}^{l} A_i(a, x) \, (s_{\varkappa_i}^*)^{\varepsilon_i}; \qquad \varepsilon_i = \pm 1,$$

wobei die $s_\varkappa^*$ immer in der ersten Potenz vorkommen und zwischen $s_\varkappa^*$ mit gleichen Indizes stets Ausdrücke $A(a, x) \neq 1$ stehen. Es ist klar, daß ein solches Wort nicht gleich Eins sein kann. Zum Beweise werden nun die Fälle (α), (β) und (γ) untersucht. Da sich das Teilwort $B(a, Q)$ nicht in der oben angeführten Weise zu Eins verkürzen ließ, ist es auf Grund früherer Überlegungen überhaupt nicht mehr auf Eins verkürzbar; seine Normalform sei $N(a, Q)$. Man stellt nun fest, wie sich $N(a, Q) P_\varkappa (s_\varkappa^*)^{-1}$ verkürzen läßt. Entweder endet $N(a, Q)$ mit $A(a) \neq 1$, dann ist der gesamte Ausdruck unverkürzbar, da ja $P_\varkappa$ mit einem Wort in x beginnt. Oder $N(a, Q)$ hört mit $\hat{Q}_\mu Q_\mu^*$ auf. Nach der Voraussetzung 2. sollte gelten: $\hat{Q}_\mu Q_\mu^* P_\varkappa = \hat{Q}_\mu (QP)_{\mu, \varkappa}$, wobei also $\hat{Q}_\mu$ unberührt bleiben sollte. Es ergibt sich daher bei der Verkürzung von (α) der Ausdruck $\ldots \hat{Q}_\mu \cdot (QP)_{\mu, \varkappa} (s_\varkappa^*)^{-1}$. Dieser Ausdruck ist nach Voraussetzung an der Stelle des Punktes unverkürzbar, ebenso ist $(QP)_{\mu, \varkappa}$ nicht mehr zu verkürzen; der Ausdruck links davon befindet sich ebenfalls schon in einer unverkürzbaren Form. Damit ist erkannt, daß sich der Ausdruck links von $(s_\varkappa^*)^{-1}$ nicht auf Eins verkürzen läßt. Es bleibt nun noch (β) und (γ) zu betrachten. Im Falle (γ) erhält man $(s_\varkappa^*) P_{\mu, \lambda} (s_\lambda^*)^{-1}$. Dabei ist $\varkappa \neq \lambda$, sonst hätte man das Gesamtwort ja schon früher verkürzen können. Links von dem betrachteten Ausdruck darf aus dem gleichen Grund nicht $P_\varkappa (s_\varkappa^*)^{-1}$, rechts davon nicht $s_\lambda^* P_\lambda^{-1}$ stehen. Man betrachte nun (β). Entweder wird $N(a, Q)$ beiderseits von $A_i(a) \neq 1$ begrenzt, dann tritt keine Zeichenverringerung mehr auf, da ja die P^{-1} rechts von x-Zeichen berandet werden sollten. $N(a, Q)$ werde also an einem Ende oder an

beiden von ${}^*Q_{\mu_1}$ (am linken Ende) bzw. von $Q^*_{\mu_l}$ (am rechten Ende) begrenzt. Man erhält dann ähnlich wie bei der Untersuchung von (α):

$$s^*_\varkappa (PQ)_{\varkappa,\,\mu_1} \overline{N}(a,Q)\, A(a)\, P_\lambda (s^*_\varkappa)^{-1}$$

bzw.

$$s^*_\varkappa P_\varkappa^{-1} A(a)\, \widetilde{N}(a,Q)\, (QP)_{\mu_l,\,\lambda} (s^*_\lambda)^{-1}$$

bzw.

$$s^*_\varkappa (PQ)_{\varkappa,\,\mu_1} \widehat{N}(a,Q)\, (QP)_{\mu_l,\,\lambda} (s^*_\lambda)^{-1}.$$

Dabei muß $\overline{N}(a,Q)$ mindestens den Kern $\widehat{Q}_{\mu_1}$, $\widetilde{N}(a,Q)$ mindestens den Kern $\widehat{Q}_{\mu_l}$ und $\hat{N}(a,Q)$ mindestens die Kerne $\widehat{Q}_{\mu_1}$ und $\widehat{Q}_{\mu_l}$ (eventuell fallen die beiden Kerne zusammen) und die sämtlichen Zwischenglieder enthalten. Die Ausdrücke zwischen den $s^*_\varkappa$ sind also sicher nicht auf Eins zu verkürzen.

Die vorangegangenen Überlegungen haben gezeigt, daß sich ein Wort $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ nicht zu Eins machen läßt, wenn es sich nicht in der in Bedingung B beschriebenen Weise zu Eins verkürzen läßt. Damit ist die Behauptung (E) bewiesen. Die Überlegungen gestatten weiter die Bestimmung der möglichen Typen von Normalformen: Es wurde nämlich festgestellt, daß zwischen $(s^*_\varkappa)^{\tau_1}$ und $(s^*_\lambda)^{\tau_2}$ die folgenden Ausdrücke stehen können:

1. $\tau_1 = \tau_2 = 1$
   a) $P_\varkappa A(a)\, N(a,Q)$
   b) $(PQ)_{\varkappa,\,\lambda}\, \overline{N}(a,Q)$
2. $\tau_1 = -\tau_2 = 1$
   a) $P_{\varkappa,\,\lambda}$
   b) $P_\varkappa^{-1} A(a)\, N(a,Q)\, A'(a)\, P_\lambda$
   c) $P_\varkappa^{-1} A(a)\, \widetilde{N}(a,Q)\, (QP)_{\nu,\,\lambda}$
   d) $(PQ)_{\varkappa,\,\mu}\, \overline{N}(a,Q)\, A'(a)\, P_\lambda$
   e) $(PQ)_{\varkappa,\,\mu}\, \widehat{N}(a,Q)\, (QP)_{\nu,\,\lambda}$
3. $-\tau_1 = \tau_2 = 1$
   $N(a,Q)$
4. $-\tau_1 = -\tau_2 = 1$
   a) $N(a,Q)\, A(a)\, P_\lambda$
   b) $\widetilde{N}'(a,Q)\, (QP)_{\nu,\,\lambda}$.

Bei dieser Klassifikation ist zunächst $\alpha_i > 2$ vorausgesetzt; wie auch für das erste nur der Fall behandelt werden soll, daß alle $\alpha_i > 2$ sind [bezüglich α_i s. [8])].

Ist nun die Normalform N' eines beliebigen Wortes vorgegeben und hat man von ihr zu entscheiden, ob sie mit der Normalform eines Wortes der Gestalt $W(a, s^* P^{-1}, Q)$ übereinstimmt, so bestimme man zunächst die Zahl und Reihenfolge der $s^*_\varkappa$ und ihre Exponenten. Damit die Normalform N' die verlangte Gestalt besitzt, müssen diese Exponenten notwendig gleich $+1$ oder -1 mod. α_i sein (gemäß dem Satz von Schreier).

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist damit schon entschieden, daß sich das Wort nicht auf die gewünschte Form bringen läßt. Ist sie dagegen erfüllt, so kommen zunächst alle Typen von Normalformen N_i in Betracht, in denen die Erzeugenden $s_\varkappa^*$ in gleicher Zahl und mit dem gleichen Exponenten mod. α_i versehen wie in N' auftreten. Um weiter prüfen zu können, ob N' von der verlangten Form ist, sind die zwischen den $s_\varkappa^*$ stehenden Ausdrücke zu untersuchen. Bezeichnet man zu diesem Zwecke die Fälle

1. a, b	mit	$C_{1,1}$
2. a, b, c, d, e	mit	$C_{1,-1}$
3.	mit	$C_{-1,1}$
4. a, b	mit	$C_{-1,-1}$,

so sind mit der Reihenfolge und den jeweiligen Exponenten der $s_\varkappa^*$ in der Normalform N die zwischen den einzelnen $s_\varkappa^*$ stehenden Ausdrücke klassifiziert und man hat nun nachzusehen, ob N' eben von einer solchen Form ist, daß die in ihr zwischen den $s_\varkappa^*$ stehenden Ausdrücke $B(a, x)$ stets von der verlangten Struktur sind. Wie man sofort erkennt, kann in der Normalform N' — sofern sie von der verlangten Gestalt ist — am Anfang nur ein Ausdruck der Art $C_{-1,1}$ oder $C_{-1,-1}$ stehen. Da aber auch der zweite Index von $C_{i,k}$ (durch den Exponenten des folgenden s_λ^*) festgelegt ist, kommt nur einer der beiden Fälle in Frage. N' habe die Form

$$B_1(a, x)\,(s_\lambda^*)^{r_1}\,B_2(a, x)\,\ldots.$$

Im Falle $C_{-1,1}$ kann man auf Grund der Voruntersuchung sofort entscheiden, ob B_1 von der Form $N(a, Q)$ ist. Statt bei $C_{-1,-1}$ zu entscheiden, ob $B_1 = N(a, Q)\,A(a)\,P_\lambda$ ist, braucht man offenbar nur zu entscheiden, ob

$$B_1(a, x)\,P_\lambda^{-1} = N(a, Q)$$

ist. Dies ist aber nach früheren Überlegungen in endlich vielen Schritten zu entscheiden. Sinngemäß verfährt man in den anderen Fällen, so daß also insgesamt folgende Probleme auftreten können:

$$C_{1,1}: \qquad P_\varkappa B = N(a, Q)\,?$$
$$C_{1,-1}: \qquad P_\varkappa B P_\lambda^{-1} = N(a, Q)\,?$$
$$C_{-1,1}: \qquad B = N(a, Q)\,?$$
$$C_{-1,-1}: \qquad B P_\lambda^{-1} = N(a, Q)\,?$$

Im Falle, daß alle oder einige der Exponenten $\alpha_i = 2$ sind, müssen jeweils die *beiden* Möglichkeiten $C_{-1,1}$ und $C_{-1,-1}$ bzw. $C_{1,1}$ und $C_{1,-1}$ in Betracht gezogen werden. Da sich aber, wie leicht zu zeigen ist, die Fälle $C_{-1,1}$ und $C_{-1,-1}$ bzw. $C_{1,1}$ und $C_{1,-1}$ einander ausschließen, kann jeweils der zweite Index in eindeutiger Weise bestimmt werden, womit

dann der erste Index des folgenden $C_{i,k}$ festgelegt ist. Da bei jedem $B(a, x)$ in endlich vielen Schritten festgestellt werden kann, ob es sich auf die verlangte Gestalt bringen läßt, und man nur endlich viele solcher $B(a, x)$ zu untersuchen hat, kann man also — sowohl im Falle, daß alle $\alpha_i > 2$ als auch in dem, daß alle oder einige der $\alpha_i = 2$ sind — in endlich vielen Schritten feststellen, ob die Normalform N' die gewünschte Gestalt hat.

Der Fall[18]), daß alle oder einige der P von der Form $A(a)\overline{P}$ sind, erledigt sich ähnlich wie der entsprechende, bereits behandelte Fall, daß die Q von der Form $A'\overline{Q}A''$ sind.

Es bleiben schließlich noch die Behauptungen (A) (γ) und (B) (γ) zu erledigen. Wie bereits in diesem Abschnitt ganz zu Anfang des Beweises bemerkt wurde, ist es zur Lösung der Probleme (A) (γ) und (B) (γ) in $\mathfrak{G}$ notwendig und hinreichend, dieselben in $\hat{\mathfrak{G}}$ zu lösen. Indem man wieder $\hat{\mathfrak{G}}$ als freies Produkt aus $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mit der vereinigten Untergruppe $\mathfrak{U}(a, s, t; R^{(2)}(a))$ auffaßt, kann man wieder von der Normalform eines Wortes in bezug auf dieses freie Produkt sprechen. (Daß $\hat{\mathfrak{G}}$ tatsächlich als ein solches freies Produkt mit vereinigter Untergruppe aufgefaßt werden kann, wurde schon bewiesen.) Zum Beweis von (B) (γ) untersucht man, auf welche Weise sich ein Wort der Form

$$W(x, y) \equiv X_1(x)\, Y_1(y)\, X_2(x) \ldots$$

in Eins verwandeln läßt, sofern dies überhaupt möglich ist. Offenbar gehören die Teilwörter X aus W der Gruppe $\mathfrak{G}_1$, die Teilwörter Y aus W der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ an. Damit das vorgelegte Wort $W(x, y)$ verkürzt werden kann, müssen sich einige der X oder Y in irgendein Wort $W'(a, s, t)$ der Untergruppe verwandeln lassen. Es läßt sich nun zeigen:

1. Eine Relation der Form $X(x) = W'(a, s, t)$ bzw.

$$Y(y) = W''(a, s, t)$$

besteht dann und nur dann, wenn X bzw. Y und W' bzw. W'' gleich Eins sind.

2. Alle Relationen zwischen den x bzw. y folgen aus $R^{(1)}(x)$ bzw. $R^{(3)}(y)$ allein.

Die zweite Behauptung erweist sich wegen der Aussage (B) (α) bzw. (B) (β) und der Tatsache, daß sich $\mathfrak{G}'(a, x; R^{(2)}(a), R^{(1)}(x))$ bzw. $\mathfrak{G}''(a, y; R^{(2)}(a), R^{(3)}(y))$ als freies Produkt aus $\tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_1(x; R^{(1)}(x))$ bzw. aus $\tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$ und $\tilde{\mathfrak{G}}_3(y; R^{(3)}(y))$ auffassen läßt, sofort als richtig. Um die Richtigkeit von (1) nachzuweisen, kann man sich auf die Betrachtung von $\mathfrak{G}_1$ beschränken, da die entsprechenden Untersuchungen über $\mathfrak{G}_2$ in denen von $\mathfrak{G}_1$ als Spezialfall enthalten sind. Man geht wieder von $\mathfrak{G}_1$ zu $\mathfrak{G}_1^*$ über und hat wegen Hilfssatz 2 in $\mathfrak{G}_1^*$ zu

[18]) Vgl. Bemerkung in [11]).

zeigen: Sind $X(x)$ und $W'(a, s^* P^{-1}, Q)$ von Eins verschieden, dann ist auch

$$X(x)\,[W'(a, s^* P^{-1}, Q)]^{-1} \neq 1. \tag{I}$$

$\mathfrak{G}_1^*$ läßt sich als freies Produkt aus $\tilde{\mathfrak{G}}_1(x; R^{(1)}(x))$, $\tilde{\mathfrak{G}}_2(a; R^{(2)}(a))$, $\mathfrak{G}_3(s^*; (s^*)^z)$ auffassen. Es werde im folgenden angenommen, daß sich W' in diesem freien Produkt schon in der Normalform befindet, und dementsprechend N statt W'^{-1} geschrieben. Es ist nun zu beweisen, daß sich der Ausdruck $X(x)\,N(a, s^* P^{-1}, Q)$ unter der Bedingung $X \neq 1$, $W' \neq 1$ bei Anwendung der SCHREIERschen Konstruktion nicht zu Eins verkürzen läßt. Zunächst könnten Verkürzungen höchstens an der „Nahtstelle" zwischen X und N eintreten. Beginnt N mit $s_\varkappa^*$ oder einem Ausdruck in a $(\neq 1)$, so ist eine solche Verkürzung nicht möglich. N beginne daher mit einem Teilwort in x. Rührt das betreffende Teilwort von einem $P_\varkappa$ her, so folgt auf einen solchen Ausdruck, wie schon gezeigt wurde, notwendig das zugehörige $s_\varkappa^*$. Spätestens an dieser Stelle hört die Verkürzung auf. Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, daß das x-haltige Teilwort von einem Q_μ herrührt und N dann folgendermaßen beginnt: $^*Q_\mu \hat{Q}_\mu$, wobei also der Kern $\hat{Q}_\mu$ unzerstört vorhanden ist. (Wie früher nachgewiesen wurde, ist diese letztere Voraussetzung für N immer erfüllt.) Da, wie man den Voraussetzungen 2a bzw. 2b über die Q unmittelbar entnimmt, bei einer Verkürzung von $X(x)Q_\mu$ der Kern von Q_μ unberührt bleibt[19]), ist auch in diesem Falle der Ausdruck auf der linken Seite von (I) nicht auf Eins verkürzbar. Damit ist aber 1. bewiesen.

Es läßt sich daher abschließend feststellen:

Läßt sich ein Ausdruck der Form $W(x, y)$ in der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf Eins verkürzen, dann ist dies sicher schon auf Grund der definierenden Relationen $R^{(1)}(x)$ und $R^{(3)}(y)$ allein möglich. Das war zum Beweis von (B) (γ) zu zeigen.

Man kann jetzt auch sofort sagen, wie die Normalform eines Wortes der Form $W(x, y)$ aussieht. Da, wie gezeigt wurde, sich $W(x, y)$ höchstens dadurch verkürzen läßt, daß einige der $X(x)$ oder $Y(y) = 1$ sind, kommen bei einer solchen Verkürzung nie andere Zeichen a, s, t in das betreffende Wort hinein, so daß auch die Normalform wieder die Gestalt

$$\bar{X}_1(x)\,\bar{Y}_1(y)\,\bar{X}_2(x)\ldots$$

hat. Zur Lösung der Aufgabe (A) (γ) suche man von dem Wort $W(a, x, y, s, t)$, von dem entschieden werden soll, ob es von der Form $W'(x, y)$ ist, die Normalform in dem freien Produkt aus $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mit der vereinigten Untergruppe $\mathfrak{U}$ auf. Dies ist, wie schon früher gezeigt

[19]) Im Falle 2a kommen nämlich die Absorptionen spätestens bei $\hat{Q}_\mu$ zum Stillstand, da ja dieser Ausdruck von a-Zeichen berandet ist, im Falle 2b schon bei $^*Q_\mu$, da dieser Ausdruck rechts von a-Zeichen begrenzt wird.

wurde, in der Tat möglich. Die Normalform sei:

$$N' \equiv X_1(x, a, s, t)\, Y_1(y, a, s, t) \ldots X_m(x, a, s, t)\, Y_m(y, a, s, t).$$

Dann ist, ähnlich wie früher, die Frage zu beantworten, ob N' mit einer Normalform der oben angegebenen Gestalt

$$\overline{X}_1(x)\, \overline{Y}_1(y) \ldots \overline{X}_{m'}(x)\, \overline{Y}_{m'}(y)$$

übereinstimmt. Nach dem Satz von Schreier kommt dabei nur eine solche Normalform N in Betracht, die die gleiche Zahl von x- und y-Teilwörtern wie N' aufweist. Man muß nun zusehen, ob sich diese Teilwörter $\overline{X}(x)$ und $\overline{Y}(y)$ so bestimmen lassen, daß $N^{-1}N' = 1$ wird. Da N und N' bereits unverkürzbar waren, kann eine Verkürzung des gesamten Ausdrucks nur dann eintreten, wenn

$$\overline{X}_1^{-1} X_1 = \widetilde{W}(a, s, t)$$

ist. Diese Formel, in der $\widetilde{W}$ noch frei wählbar ist, ergibt sich unmittelbar aus den allgemeinen Prinzipien des Satzes von Schreier. Diese Relation ist mit der Frage gleichbedeutend, ob sich X_1 auf die Form $\overline{X}_1 \widetilde{W}(a, s, t)$ bringen läßt. Ist dies nicht möglich, so läßt sich das vorgelegte Wort nicht auf die verlangte Gestalt $W(x, y)$ bringen. Ist diese Bedingung hingegen erfüllt, haben sich also $\overline{X}_1$ und $\widetilde{W}$ in der geforderten Weise bestimmen lassen, dann muß zur weiteren Verkürzung des Wortes die Beziehung

$$\overline{Y}_1^{-1}\, \widetilde{W}_1(a, s, t)\, Y_1 = \widetilde{W}_2(a, s, t)$$

erfüllt werden. In ihr sind Y_1 und $\widetilde{W}_1$ fest vorgegeben, Y_1 nämlich durch die vorgelegte Normalform, $\widetilde{W}_1$ durch den vorangegangenen Schritt; dagegen sind $\overline{Y}_1$ und $\widetilde{W}_2$ erst wieder zu bestimmen. Hier ist also die Frage zu beantworten, ob sich $\widetilde{W}_1 Y_1$ auf die Gestalt $\overline{Y}_1(y)\, \widetilde{W}_2(a, s, t)$ bringen läßt. Um die Lösung der beiden eben erwähnten Probleme aufzuzeigen, genügt es wieder, sich auf die Betrachtung des ersten Problems in der „x-haltigen" Gruppe $\mathfrak{G}_1$ zu beschränken. Man geht nun wie vorhin von $\mathfrak{G}_1$ zu $\mathfrak{G}_1^*$ über und hat dann wegen Hilfssatz 2 zu entscheiden, ob sich das vorgegebene Wort $X(x, a, s^* P^{-1}, Q)$ auf die Form

$$\text{(I)} \qquad \overline{X}(x)\, \widetilde{W}\big(a, s^* P^{-1}(a, x),\ Q(a, x)\big)$$

bringen läßt. Dazu suche man von X die Normalform auf, was möglich ist, da $\mathfrak{G}_1^*$ ein freies Produkt aus Gruppen ist, in denen man das Identitätsproblem lösen kann. Weiterhin klassifiziere man die Typen von Normalformen der Wörter der Gestalt (I), wobei man sich auf die bereits angestellten Untersuchungen zum Beweise der Behauptungen (D) und (E) sowie auf die Erkenntnisse stützen kann, die sich bei der Betrachtung der Verkürzungsmöglichkeiten eines Wortes der Form (I) ergaben. Man erhält dann:

1. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit a: $\quad \overline{X}(x)\, N(a, s^* P^{-1}, Q)$
2. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit s^*: $\quad \overline{X}(x)\, N(a, s^* P^{-1}, Q)$
3. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit $P_\varkappa(a, x)$: $\quad \overline{X}'(x)\, P'_\varkappa(a, x)\, (s^*_\varkappa)^{-1} N'(a, s^* P^{-1}, Q)$,

wobei $P_\varkappa(a, x) = B(x) P'_\varkappa(a, x)$, $P'_\varkappa$ links begrenzt von $A(a)$, eventuell $P'_\varkappa = 1$.

4. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit $(QP)_{\mu,\varkappa}$: $\quad \overline{X}''(x)(QP)'_{\mu,\varkappa}(s^*_\mu)^{-1} N''(a, s^* P^{-1}, Q)$,

wobei $(QP)_{\mu,\varkappa}(a, x) = C(x)\,(QP)'_{\mu,\varkappa}$, $(QP)'_{\mu,\varkappa}$ links begrenzt von $A(a)$, eventuell $(QP)'_{\mu,\varkappa} = 1$.

5. $N(\widetilde{W})$ beginnt mit ${}^*Q_\mu \hat{Q}_\mu$: $\quad \overline{X}\, {}^*Q'_\mu \hat{Q}_\mu \ldots$,

wobei ${}^*Q_\mu = D(x) {}^*Q'_\mu$, ${}^*Q'_\mu$ links von einem Ausdruck in a berandet, eventuell ${}^*Q'_\mu = 1$. Die Punkte ... deuten den Rest der Normalform $N(a, s^* P^{-1}, Q)$ an, der durch die Herausnahme von ${}^*Q_\mu \hat{Q}_\mu$ entstanden ist. Ist ${}^*Q'_\mu = 1$, so beginnt der Rest sicher mit einem Ausdruck in a [vgl. hierzu [19]].

Die Entscheidung, ob das vorgelegte Wort mit einem in 1. bis 5. angeführten Ausdruck übereinstimmt, verläuft wie früher, so daß hier nicht mehr darauf eingegangen werden soll.

Als Beispiele hat man etwa die folgenden *Gruppen der ebenen Komplexe in der Normalform*[20]).

$$\mathfrak{G}\,(x_0, a_0, y_1, \ldots, y_n;$$
$$x_0^\xi, a_0^\alpha, \{y_i^{\eta_i}\}_1^n, (x_0\, y_1\, a_0\, y_2 \ldots y_n)^\beta;\ \xi, \alpha, \beta, \eta_i \neq 1, n \geq 2).$$

Wie man leicht nachprüft, genügen diese Gruppen den gestellten Forderungen, wenn man etwa x_0 mit P und $y_1 a_0 y_2 \ldots y_n$ mit U identifiziert.

Die zu Anfang dieses Abschnittes über die Q gemachten Voraussetzungen lassen sich natürlich noch in mannigfacher Weise abändern und abschwächen. Als Beispiel hierfür sei erwähnt, daß sich der gleiche Gruppentypus mit den folgenden Q in ähnlicher Weise behandeln läßt:

Die Q seien von folgender Beschaffenheit:

Es lassen sich zu ihnen $Q'(a, x)$ finden, so daß die folgenden Identitäten bestehen:

(I) $\quad Q_\mu \equiv A_\mu(Q'; a)\, F_0(R^{(1)}(x), R^{(2)}(a)), \qquad \mu = 1, \ldots, m$

(II) $\quad Q'_\nu \equiv B_\nu(Q; a)\, F'_0(R^{(1)}(x), R^{(2)}(a)), \qquad \nu = 1, \ldots, n.$

wobei diese Q' den früheren Voraussetzungen an Stelle der Q genügen sollen. Aus den Identitäten (I) und (II) ergibt sich durch Einsetzen der einen in die andere

(I′) $\quad Q_\mu \equiv A_\mu\{B(Q; a)\, F'_0(R^{(1)}, R^{(2)}); a\}\, F_0(R^{(1)}, R^{(2)}),$

(II′) $\quad Q'_\nu \equiv B_\nu\{A(Q'; a)\, F_0(R^{(1)}, R^{(2)}); a\}\, F'_0(R^{(1)}, R^{(2)}).$

Von diesen Identitäten wird noch verlangt:

[20]) Bei Reidemeister [10] gelingt die Lösung des Identitätsproblems unter der Einschränkung: $\alpha, \beta, \xi, \eta_i \geq 4$.

Wenn man in (I′) und (II′) die Q bzw. Q' durch „Unbestimmte“ t bzw. t' ersetzt, durch Erzeugende also, die durch keinerlei Relationen mit den anderen Erzeugenden verknüpft sind, dann sollen diese Identitäten auch in den neuen Erzeugenden t und t' gelten[21]).

III. Eine Verallgemeinerung.

Es sei die folgende Gruppe vorgelegt:

$$\mathfrak{G}\left(a, b, c;\ R^{(1)}(a), R^{(2)}(b), R^{(3)}(c), \{(P_\mu^0(a,b,c))^{\alpha_\mu}\}_1^m, \{Q_\nu^0(a,b,c)\}_1^n;\ \alpha_\mu > 1\right)^{22}).$$

Hierin sollen sich die Erzeugenden b und c in Aggregate $X_\varkappa(b,c)$ und $Y_\lambda(b,c)$ zusammenfassen lassen:

$$(P_\mu^0(a,b,c))^{\alpha_\mu} \equiv \left(P_\mu(X(b,c);a)\, U_\mu(Y(b,c);a)\right)^{\alpha_\mu} F_\mu(R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)})$$

$$(Q_\nu^0(a,b,c)) = Q_\nu(X(b,c);a)\, V_\nu(Y(b,c);a)\, F_\nu'(R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)})$$

derart, daß die Q, U und V den im vorangehenden angegebenen erweiterten Voraussetzungen über die Q genügen, wenn die X durch „Unbestimmte“ x und die Y durch „Unbestimmte“ y ersetzt werden, während die a beidemale die gleiche Bedeutung haben sollen. P genüge bei der gleichen Ersetzung $X \to x$ den Voraussetzungen 2. von Abschnitt II über die dort in der gleichen Weise bezeichneten P. Die $X(b,c)$ und $Y(b,c)$ dagegen sollen die im vorigen Abschnitt formulierten Voraussetzungen über $Q(a,x)$ erfüllen, wenn man in diesen die x durch die b und die a durch die c ersetzt.

Dann läßt sich beweisen:

(A) *Alle Relationen zwischen den a folgen aus $R^{(1)}(a)$ allein.*

(A′) *Alle Relationen zwischen b und c folgen aus $R^{(2)}(b)$ und $R^{(3)}(c)$ allein (und damit natürlich alle Relationen zwischen den b aus $R^{(2)}(b)$ und alle Relationen zwischen den c aus $R^{(3)}(c)$ allein).*

(B) *Man kann entscheiden, ob sich ein Wort der Gruppe auf die Form $W(b,c)$ oder auf die Form $W(a)$ bringen läßt.*

(C) *Man kann insbesondere das Identitätsproblem lösen.*

Beweis. Die Einführung der neuen Erzeugenden x und y vermöge der definierenden Relationen $x^{-1}X(b,c)$ bzw. $y^{-1}Y(b,c)$ ändert nach Hilfssatz 2 nichts an der Problemstellung. Der Übergang zu äquivalenten Relationen führt auf:

$$\mathfrak{G}\left(a, b, c, x, y;\ R^{(1)}(a), R^{(2)}(b), R^{(3)}(c),\right.$$

$$\left.(P(x,a)\, U(y,a))^{\alpha},\ Q(x,a)\, V(y,a),\ x^{-1}X(b,c),\ y^{-1}Y(b,c)\right).$$

---

[21]) Ob diese neue Bedingung überflüssig ist, ließ sich nicht beweisen, obwohl diese Frage durchaus von Interesse ist.

[22]) In $\mathfrak{G}'(a; R^{(1)}(a))$, $\mathfrak{G}''(b; R^{(2)}(b))$ und $\mathfrak{G}'''(c; R^{(3)}(c))$ soll das Identitätsproblem lösbar sein.

Behauptung (D). Diese Gruppe läßt sich als freies Produkt aus

$$\mathfrak{G}_1\left(a, x, y; R^{(1)}(a), Q(x, a)\, V(y, a), \left(P(x, a)\, V(y, a)\right)^{\alpha}\right)$$

und

$$\mathfrak{G}_2\left(b, c, x, y; R^{(2)}(b), R^{(3)}(c), x^{-1} X(b, c), y^{-1} Y(b, c)\right)$$

mit der vereinigten Untergruppe $\mathfrak{U}(x, y)$ auffassen.

Man zeigt nun:

1. In $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ erzeugen x und y eine freie Untergruppe.

2. Man kann in $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ entscheiden, ob sich ein Wort aus einer dieser Gruppen in eines der zu vereinigenden Untergruppe verwandeln läßt.

3. Man kann in beiden Gruppen das Identitätsproblem lösen.

4. In $\mathfrak{G}_1$ folgen alle Relationen zwischen den a aus $R^{(1)}(a)$ allein.

4a. Man kann in $\mathfrak{G}_1$ entscheiden, ob sich ein Wort auf die Form $W(a)$ bringen läßt.

5. In $\mathfrak{G}_2$ folgen alle Relationen zwischen den b und c aus $R^{(2)}(b)$ und $R^{(3)}(c)$ allein.

5a. Man kann in $\mathfrak{G}_2$ entscheiden, ob sich ein Wort auf die Form $W(b, c)$ bringen läßt.

Die Richtigkeit der Behauptungen 1., 2., 3., 4., 4a. ist in $\mathfrak{G}_1$ klar wegen der Aussagen (B) (γ) bzw. (A) (γ) bzw. (C) bzw. (B) (α), (B) (β), bzw. (A) (α), (A) (β) des Abschnitts II (unter Beachtung der im vorigen Abschnitt hinzugefügten Ergänzungen). Zum Beweise der Behauptungen bezüglich $\mathfrak{G}_2$ identifiziere man diese Gruppe mit der in Abschnitt II behandelten Gruppe $\mathfrak{G}_1$:

Die Behauptungen 1. und 2. ergeben sich aus (E) und (D) (von Abschnitt II) und der Tatsache, daß $\tilde{\mathfrak{G}}\left(x, y, c; R^{(3)}(c)\right)$ freies Produkt aus $\hat{\mathfrak{G}}'(x, y)$ und $\hat{\mathfrak{G}}''\left(c; R^{(3)}(c)\right)$ ist. Wegen Hilfssatz 2b und der Voraussetzung in der Fußnote [22]) ist die Behauptung 3. evident, während wegen Hilfssatz 2a die Behauptung 5. richtig ist. (Man identifiziere zu diesem Ende:

$$x, y \leftrightarrow t$$

$$b, c \leftrightarrow b$$

$$1 \leftarrow (s P)^{\alpha}.)$$

Entsprechend ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung 5a. aus Hilfssatz 2b, wenn man die gleiche Zuordnung vornimmt.

Aus 1. bis 5a. folgert man dann, wie schon mehrfach ausgeführt (vgl. etwa Folgerung F) die Behauptungen (A) bis (C).

Die in den Abschnitten II und III über die P und Q gemachten Voraussetzungen lassen sich je nach den übrigen Voraussetzungen (über die $R^{(i)}$) leicht weiter abschwächen.

In diesem Zusammenhang sei angeführt, daß als Anwendungsbeispiel für die dargestellte Methode das Identitätsproblem in den folgenden

Gruppen gelöst wurde, die einer Arbeit von K. BRAUNER[23]) entnommen sind:

a) $q^{-\nu} p^{\mu}$ [24])

b) $r^{-\mu} q^{-\nu} p^{\mu}$

$r^{-1} q r q^{-1}$

c) $r^{-\mu} q^{-\nu} p^{\mu} s^{\nu}$

$q^{-1} r q r^{-1}$

$p^{-1} s p s^{-1}$

d) $q_1^{-\nu_1} p_1^{\mu_1} q_2^{\nu_1}$

$q_2^{-\nu_2} p_1^{-\mu_2} q_3^{\nu_3} p_2^{\mu_2}$

$p_3^{\mu_3} q_3^{-\nu_3} p_2^{-\mu_3}$

$p_1 q_2 p_1^{-1} q_2^{-1}$

$p_2 q_3 p_2^{-1} q_3^{-1}$

e) $q_2^{\nu_1} p_1^{\mu_1} q_1^{-\nu_1}$

$q_{i+1}^{\nu_{i+1}} p_i^{\mu_i} q_i^{-\nu_i} p_{i-1}^{-\mu_i}$, $\quad i = 2, 3, \ldots, k$

$p_k^{\mu_k} q_k^{-\nu_k} p_k^{-\mu_k}$

$p_j q_{j+1} p_j^{-1} q_{j+1}^{-1}$, $\quad j = 1, 2, \ldots, k-1$.

f) $q_i^{-\mu_i} p_i^{\alpha_i} q_{i-1}^{\mu_i - 1 \cdot \mu_i}$

$p_i^{-1} q_{i-1}^{-\lambda_i - 1} p_{i-1}^{\beta_i} q_{i-2}^{\mu_i - 2 \cdot \lambda_i - 1}$, $\quad i = 2, 3, \ldots, k$.

$q_1^{-\mu_1} p_1^{\nu_1}$.

Literaturverzeichnis.

[1] ARTIN, E.
Theorie der Zöpfe. Hamb. Abh. **4**, 47—72 (1926).

[2] DEHN, M.
Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen. Math. Ann. **72**, 413—421 (1912).

[3] DEHN, M.
Die beiden Kleeblattschlingen. Math. Ann. **75**, 402—413 (1914).

[4] GIESEKING, H.
Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen. Diss. Münster 1912.

[5] GROUCHKO, I.
La résolution des problèmes d'identité dans les groupes à plusieurs relations d'un type spéciale. Rec. math. Moscou, n. s. **3**, 543—550 (1938). (Russisch mit französischer Zusammenfassung.)

[23]) BRAUNER, K., Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. II—IV, Hamb. Abh. 6, 1—55 (1928).

[24]) Von den Gruppen werden nur die linken Seiten der definierenden Relationen angeführt. Als Erzeugende treten lediglich die in diesen Relationen angegebenen Zeichen auf.

[6] Magnus, W.
Diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation. J. f. d. r. u. a. Math. **163**, 141—165 (1930).

[7] Magnus, W.
Untersuchungen über einige diskontinuierliche Gruppen. Math. Ann. **105**, 52—74 (1931).

[8] Magnus, W.
Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation. Math. Ann. **106**, 295—307 (1932).

[9] Reidemeister, K.
Über Knotengruppen. Hamb. Abh. **6**, 56—64 (1928).

[10] Reidemeister, K.
Einführung in die kombinatorische Topologie. Braunschweig: Vieweg & Sohn 1932.

[11] Schreier, O.
Über die Gruppen $A^\alpha B^\beta = 1$. Hamb. Abh. **3**, 167—169 (1923).

[12] Schreier, O.
Die Untergruppen der freien Gruppen. Hamb. Abh. **5**, 161—183 (1927).

[13] Tartakovskij, V. A.
Die Siebmethode in der Gruppentheorie. Mat. Sbornik, n. s. **25** (67) 3—50 (1949). (Russisch.)

[14] Tartakovskij, V. A.
Anwendung der Siebmethode zur Lösung des Identitätsproblems in einigen Typen von Gruppen. Mat. Sbornik, n. s. **25** (67) 251—274 (1949). (Russisch.)

[15] Tartakovskij, V. A.
Lösung des Identitätsproblems für eine Gruppe mit k-verkürzbarer Basis für $k > 6$. Isvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **13**, 483—494 (1949). (Russisch.)

(Eingegangen am 23. Januar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 363—375 (1952).

The Theory of Subspaces of a Finsler Space.

Part I.

By

Hanno Rund in Freiburg i. Br.

§ 1.

Introductory.

Any theory of subspaces immersed in a Finsler space is to a large extent dependent on the definition of the covariant derivative employed in the development of the theory. Up to the present time the covariant derivative as defined by CARTAN [1][1]) has been used consistently by the various authors investigating the properties of subspaces. The earliest discussions of this topic are due to CARTAN [1], BERWALD [2], WEGENER [3] and HAIMOVICI [4]. Its more analytical aspects were developed by several Japanese authors, particularly by HOMBU [5], and the basic theory may be regarded to have been rounded off satisfactorily in a memoir by E. T. DAVIES [6]. In connection with these theories it is to be noted that the introduction of CARTAN's covariant derivative involves the continual use of the notion of element of support which is a fundamental ingredient of his theory and consequently of all later developments. In the opinion of the present author, however, it seemed desirable that a theory of Finsler spaces should avoid this notion which seems to alienate the theory both from the natural geometry inherent to Finsler spaces as well as from the Calculus of Variations which constitutes, after all, the origin of such spaces. Thus, *regarding a Finsler space as locally Minkowskian*[2]), the present author [7] introduced a new covariant derivative on the basis of which a theory of curvature of Finsler spaces was developed [8].

The present paper is the first of a series[3]) in which the theory of subspaces is studied regarding this new principle as fundamental. These investigations were suggested by certain problems which arose when applications of the theory of Finsler spaces to analytical dynamics and geometrical optics were considered. Such applications will be discussed after the necessary geometrical preliminaries have been established in this and the following paper.

The foundations of a theory of curves and hypersurfaces in Minkowskian spaces have already been laid in a previous paper [9], but it

[1]) Numbers in square brackets refer to the bibliography at the end.

[2]) An explicit formulation of this principle is given in [7], § 1.

[3]) These investigations were begun shortly after being granted an award by the Royal Commissioners for the Exhibition of 1951 to whom I wish to express my sincere gratitude.

was found that a direct generalisation of the methods used there was not possible. Similarly, by avoiding the use of the element of support, one has to contend with the fact that one cannot generalise many of the methods of frequent use in Riemannian Geometry as is generally customary in the theory of Finsler spaces. Thus it was necessary to develop a somewhat novel geometrical approach. For instance, the notion of transversality, which is the natural generalisation of orthogonality, is not a symmetrical one, so that the normal vector n^i to a hypersurface does not enjoy all the properties which one should expect at first sight — in fact, it has to share these with a cone of directions which will be defined suitably. Also, if we consider the field of unit normals to a hypersurface, the vectors Dn^i/Ds do not, in general, lie in the tangent hyperplane when we differentiate along a curve of the hypersurface. These examples are sufficient to indicate that a rather novel geometrical picture is created by such circumstances, which, however, leads to simple and uncomplicated results in the end. One should note that one may not expect to rediscover a large number of well-known results of euclidean differential geometry when our metric is not even locally a euclidean one.

On the other hand, our covariant derivative possesses one very essential feature which seems to make it especially adaptable for an investigation of this kind. As DAVIES[4]) points out the induced and intrinsic connection parameters (in CARTAN's sense) of a subspace do not in general bear the simple relation to each other that one should expect from a purely geometrical point of view. This seems to cause serious difficulties when one considers curves of the subspace which are at the same time geodesics of the enveloping space. In the present paper we shall show that for our covariant derivative the inrinsic and induced derivatives of a subspace are related to each other in a simple geometrical manner.

Thus we shall devote this paper mainly to the analytical preliminaries which will be indispensable to our later developments, in which the principal stress will be laid on the geometrical point of view. As before, we shall be using the dual Minkowskian tangent spaces, so that in § 2 we shall first give an analytical discussion of the Hamiltonian function corresponding to subspaces. The abovementioned result will be established in § 3 — this must of necessity involve a somewhat tedious analytical procedure. Simple geometrical consequences will be derived, but the complete geometrical discussion will be given in Part II.

§ 2.

The Hamiltonian function corresponding to a subspace.

We consider an n-dimensional Finsler space F_n with coordinates $x^i\,(i=1,\ldots,n)$ and distance function $F(x^i, x'^i)$, where $x'^i = dx^i/dt$,

[4]) [6], p. 21.

t being an arbitrary parameter. As usual we assume that F is positive, analytic in all its variables, convex and homogeneous of the first degree in the x'^i. To each point x_0^i of F_n we associate the dual Minkowskian tangent spaces $T_n(x_0^i)$, $T_n'(x_0^i)$ whose elements are respectively the contravariant vectors x'^i and covariant vectors y_i attached to the point x_0^i. The local metric of F_n is determined by T_n, whose Minkowskian distance-function is simply $F(x_0^i, x'^i)$, that of T_n' is given by $H(x_0^i, y_i)$[5]. The latter function is identical to the Hamiltonian function of the problem in the Calculus of Variations corresponding to F apart from a normalisation factor. The metric tensors of F_n are defined by the equations

$$g_{ij}(x, x') = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F^2(x, x')}{\partial x'^i \partial x'^j}, \tag{2.1}$$

$$g^{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H^2(x, y)}{\partial y_i \partial y_j}. \tag{2.2}$$

If x'^i of T_n corresponds to y_i of T_n', we have

$$x'^i = H(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_i}, \qquad y_j = F(x, x') \frac{\partial F(x, x')}{\partial x'^i}, \tag{2.3}$$

as well as the classical formulae involving the raising and lowering of suffixes by means of the metric tensors (2.1) and (2.2), provided the directional arguments of these tensors correspond to the vectors under consideration.

Let us introduce an m-dimensional subspace F_m of F_n represented parametrically by the set of equations[6])

$$x^i = x^i(u^\alpha), \tag{2.4}$$

where we suppose the functions (2.4) to be analytic and the matrix

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right) \tag{2.5}$$

to have rank m. The components with respect to F_n of a vector u'^α of the Minkowskian tangent space T_m of F_m are then given by

$$x'^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} u'^\alpha, \tag{2.6}$$

so that we immediately have

$$\frac{\partial x'^i}{\partial u'^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}. \tag{2.7}$$

As we shall not be using the usual projection factors[7]) it is necessary that we should develop the fundamental formulae relating the elements of F_m with those of F_n *ab initio*, especially as our choice of the directional argument in the metric tensors prevents the customary application of

[5]) Cf. [7], § 1; [9], § 1.

[6]) Latin indices run from 1 to n; Greek indices from 1 to m. We retain the usual summation convention.

[7]) The projection factors are regarded as functions of the element of support by authors making use of the latter notion. Cf. Davies [6], p. 21.

the rigorous Quotient theorem. In particular we shall discuss in more detail the Hamiltonian function $\overline{H}$ of the tangent spaces T'_m of F_m. The induced metric of F_m is determined by its distance function

$$\overline{F}(u^\alpha, u'^\alpha) \equiv F\left((x^i(u^\alpha), \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} u'^\alpha\right), \tag{2.8}$$

which is again homogeneous of the first degree in the u'^α. From (2.8) and (2.7) we deduce

$$\frac{\partial \overline{F}^2}{\partial u'^\alpha} = \frac{\partial F^2}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x'^i}{\partial u'^\alpha} = \frac{\partial F^2}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha},$$

and similarly

$$\frac{\partial^2 \overline{F}^2}{\partial u'^\alpha \partial u'^\beta} = \frac{\partial^2 F^2}{\partial x'^i \partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u^\beta},$$

since the matrix (2.5) is independent of direction. Defining the metric tensor $\bar{g}_{\alpha\beta}$ of F_m analogously to (2.1) we therefore have

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u') = g_{ij}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{2.9}$$

We can now introduce the tangent spaces T'_m at each point of F_m as the space of elements v_α at that point defined by

$$v_\alpha = \bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\, u'^\beta. \tag{2.10}$$

According to (2.9) and (2.6)

$$v_\alpha = g_{ij}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} x'^j = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} y_i. \tag{2.11}$$

From (2.3), (2.7) and (2.8) we deduce also

$$v_\alpha = \frac{\partial x'^i}{\partial u'^\alpha} F(x, x') \frac{\partial F(x, x')}{\partial x'^i} = \overline{F}(u, u') \frac{\partial \overline{F}(u, u')}{\partial u'^\alpha}, \tag{2.12}$$

analogously to (2.3). Thus when u'^α is a unit vector, i.e. $\overline{F}(u, u') = 1$, the variables v_α are the canonical variables of the problem in the Calculus of Variations corresponding to the function $\overline{F}(u, u')$.

Differentiating (2.11) with respect to v_β and v_γ, regarding v_α as an arbitrary vector of a *fixed* T'_m, we find

$$\delta^\beta_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\beta}, \tag{2.13}$$

$$0 = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial v_\gamma \partial v_\beta}. \tag{2.13'}$$

Using (2.13) and (2.11) we may now write

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} y_i = v_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\beta} v_\beta.$$

Since, however, for a fixed T'_m, the elements of the matrix (2.5) may be regarded as constant and independent of the variable vector y_i of T'_m, it follows that

$$y_i = \frac{\partial y_i}{\partial v_\beta} v_\beta \tag{2.14}$$

for all vectors y_i contained in T'_m.

We can now define the Hamiltonian function $\bar{H}(u^\alpha, v_\alpha)$ corresponding to F_m by writing

$$\bar{H}(u^\alpha, v_\alpha) \equiv H\left(x^i(u^\alpha), \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} v_\alpha\right). \tag{2.15}$$

From this it is not immediately clear that $\bar{H}$ is homogeneous of the first degree in the v_α; nevertheless let us put

$$\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{H}^2(u, v)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}. \tag{2.16}$$

By differentiating (2.15) with respect to v_α and v_β successively we find

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}^2}{\partial v_\alpha} &= \frac{\partial H^2}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha}, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{H}^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H^2}{\partial y_i \partial y_j} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial v_\beta} + H \cdot \frac{\partial H}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

But due to (2.3) and (2.6) the last term on the right hand side of this equation becomes

$$x'^i \frac{\partial^2 y_i}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} u'^\gamma = 0$$

in virtue of (2.13′). Thus from (2.2) and (2.16) we deduce

$$\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v) = g^{ij}(x, y) \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial v_\beta}. \tag{2.18}$$

Hence

$$\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v)\, v_\alpha v_\beta = g^{ij}(x, y)\, y_i y_j$$

as a result of (2.14), and thus

$$\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v)\, v_\alpha v_\beta = H^2(x, y) = \bar{H}^2(u, v), \tag{2.19}$$

the first part of this equation being a consequence of the definition (2.2). From (2.16) and Eulers Theorem it follows that $\bar{H}$ is homogeneous of the first degree in the v_α; $\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v)$ is homogeneous of degree zero in the v_α.

The process of raising and lowering of suffixes is the same for F_m as for F_n when the $\bar{g}^{\alpha\beta}$ are defined according to (2.16); for, using (2.18), (2.14), (2.3) and (2.13) we have

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\alpha\beta}(u, v)\, v_\beta &= g^{ij}(x, y) \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial v_\beta} v_\beta = g^{ij}(x, y)\, y_j \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} \\ &= x'^i \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} u'^\beta = \delta^\alpha_\beta u'^\beta = u'^\alpha. \end{aligned}$$

It follows from the preceding remarks that $\bar{H}$ may be regarded as the distance function of T'_m and $\bar{g}^{\alpha\beta}$ as its metric tensor. Therefore the relations between T_m and T'_m are exactly analogous to those between T_n and T'_n; in particular, there exists a one-one correspondence between them. Geometrically, $\bar{H}(u, v)$ is the function of support of the indicatrix $F(u, u') = 1$ of T_m and vice-versa[8]). It is easily seen that the following

[8]) Cf. [9], § 1.

relations, which we shall be using continually hold:

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u')\,\bar{g}^{\alpha\gamma}(u, v) = \delta^{\gamma}_{\beta}; \tag{2.20}$$

$$u'^{\alpha} = \bar{H}(u, v)\,\frac{\partial \bar{H}(u, v)}{\partial v_{\alpha}}\,. \tag{2.21}$$

Finally, the inverse relations to (2.6), (2.9) and (2.18) are respectively:

$$u'^{\alpha} = \frac{\partial y_i}{\partial v_{\alpha}}\,x'^{i}; \tag{2.22}$$

$$g_{ij}(x, x') = \bar{g}_{\alpha\beta}(u, v)\,\frac{\partial y_i}{\partial v_{\alpha}}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial v_{\beta}}; \tag{2.23}$$

$$g^{ij}(x, y) = \bar{g}^{\alpha\beta}(u, v)\,\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^{\beta}}\,. \tag{2.24}$$

where we have assumed throughout that x'^{i} is a vector in F_m.

We say that *a vector* $u'^{\alpha}_{(2)}$ is *orthogonal with respect to a vector* $u'^{\alpha}_{(1)}$ (or transversal, as in the Calculus of Variations) at the point u^{α} of F_m if[9])

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u'_{(1)})\,u'^{\alpha}_{(1)}\,u'^{\beta}_{(2)} = 0. \tag{2.25}$$

Substituting from (2.9) and (2.6) we see immediately that this is equivalent to

$$g_{ij}(x, x'_{(1)})\,x'^{i}_{(1)}\,x'^{j}_{(2)} = 0,$$

so that orthogonality in F_m implies othogonality in F_n. This notion is not, however, symmetrical in $x'^{i}_{(1)}$, $x'^{i}_{(2)}$.

§ 3.

Induced and Intrinsic Covariant Derivation.

Consider two neighbouring points A, B of F_m with coordinates x^i (or u^{α}), $x^i + dx^i$ (or $u^{\alpha} + du^{\alpha}$) respectively, a distance ds apart. Denote by x'^{k} the vector dx^k/ds of F_m, similarly by u'^{α} the same vector du'^{α}/ds. Suppose that we have defined a continuous and differentiable vector field in F_m, whose components with respect to F_n (and F_m) we shall denote by X^i (and U^{α}).

The covariant differential DX^i of the vector field X^i with respect to the embedding space F_n is given by[10])

$$DX^i = dX^i + P^i_{hk}(x, x')\,X^h\,dx^k, \tag{3.1}$$

where the connection parameters are defined by

$$P^i_{hk}(x, x') = \left\{\begin{matrix} i \\ hk \end{matrix}\right\}_{(x, x')} - \frac{1}{2}\,g^{im}(x, y)\,\frac{\partial g_{hm}(x, x')}{\partial x'^{l}}\left\{\begin{matrix} l \\ jk \end{matrix}\right\}_{(x, x')} x'^{j}. \tag{3.2}$$

Here the expressions in the curly brackets are the usual Christoffel symbols of the second kind of Riemannian Geometry, the suffixes indicating that the directional arguments are those of the displacement AB.

[9]) Cf. [9], § 2.

[10]) Cf. [7], p. 123.

The vector y_i is the vector of $T'_n(A)$ corresponding to x'^i of $T_n(A)$. Thus our covariant differential (3.1) depends solely on the vector field X^i and on the displacement AB, and not on any arbitrary element of support.

We shall now define analogously the covariant differential $\bar{D}U^\delta$ of the vector field U^α of F_m with respect to the metric $\bar{g}_{\alpha\beta}$ of F_m:

$$\bar{D}U^\delta = dU^\delta + \left[\left\{\begin{matrix}\delta\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}_{(u,u')} - \frac{1}{2}\bar{g}^{\delta\varepsilon}(u,v)\,\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\varepsilon}(u,u')}{\partial u'^\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\beta\end{matrix}\right\}_{(u,u')} u'^\mu\right] U^\alpha\, du^\beta. \tag{3.3}$$

This definition immediately ensures the condition that *geodesics of* F_m *are autoparallel curves*, i.e. their tangent vectors satisfy $\bar{D}u'^\alpha = 0$. This follows in exactly the same manner as the corresponding result for F_n[11]).

We shall now have to investigate by direct calculation the relation between DX^i and $\bar{D}U^\delta$. Firstly, we must transform the Christoffel symbols with respect to $\bar{g}_{\alpha\beta}$ into a form involving only quantities relating directly to F_n. Throughout the following calculation the directional arguments in the g_{ij} (or $\bar{g}_{\alpha\beta}$) are to be regarded as the vector x'^i (or u'^α) giving the direction of the displacement AB, so that we shall not specify them all the time.

From (2.9) we have

$$\frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\alpha} + + g_{ij}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} + g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial^2 x^j}{\partial u^\alpha \partial u^\gamma}.$$

By cyclic interchange of the indices α, β, γ we obtain two similar equations; adding the first two and subtracting the last we find (omitting those terms which cancel out)

$$\begin{aligned}\overline{[\alpha\beta,\gamma]} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial \bar{g}_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right)\\ &= g_{ij}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^\gamma} + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta} - \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\gamma}\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Now as in Riemannian Geometry we define

$$g_{ij}(x,x')\left\{\begin{matrix}i\\ h\,k\end{matrix}\right\}_{(x,x')} = [h\,k,j]_{(x,x')} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j}\right)_{(x,x')} \tag{3.4'}$$

so that we may write after suitable interchange of dummy-suffixes

$$\begin{aligned}\overline{[\alpha\beta,\gamma]} &= g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{\begin{matrix}i\\ h\,k\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^h}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k}\times\\ &\times\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta} - \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u^\gamma}\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

[11]) Cf. [7], p. 124.

This equation represents the transformation-law of the Christoffel symbols. In order to transform the first term on the right-hand side of (3.3), we differentiate the relation

$$X^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} U^\alpha, \tag{3.6}$$

obtaining

$$dX^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} U^\alpha du^\beta + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} dU^\alpha. \tag{3.7}$$

Also, the equations of geodesics in F_n have the form

$$dx'^l + \left\{ \begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix} \right\}_{(x,x')} x'^j dx^k = 0. \tag{3.8}$$

According to (3.6), (3.7) and (3.8) equation (3.1) now becomes

$$DX^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} dU^\alpha + \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^h}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} \right] U^\alpha du^\beta + \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{hm}}{\partial x'^l} X^h dx'^l,$$

where we have replaced dx^k by $(\partial x^k/\partial u^\beta)\, du^\beta$. Here it is to be noted that dx'^l refers to the geodesic Γ of F_n tangent to F_m at the point A whose tangent vector is x'^i.

Let us multiply the last equation by $g_{ij}(x, x')\, \partial x^j/\partial u^\gamma$ noting that

$$g_{ij}(x, x')\, g^{im}(x, y) = \delta_j^m. \tag{3.9}$$

We thus obtain

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} DX^i = g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} dU^\alpha + g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} U^\alpha du^\beta \times \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^h}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} X^h dx'^l.$$

To the first term on the right-hand side we apply (2.9) and to the second (3.5). We then have

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} DX^i = \bar{g}_{\alpha\gamma} dU^\alpha + \overline{[\alpha\beta, \gamma]}\, U^\alpha du^\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} X^h dx'^l - \frac{1}{2} U^\alpha du^\beta \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta} - \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial u^\gamma} \right). \tag{3.10}$$

But from the homogeneity properties of the g_{ij} we have the identities

$$\frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} dx^i = \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} dx^j = 0, \tag{3.11}$$

or, in virtue of (2.6)

$$\frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} du^\beta = \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\beta = 0. \tag{3.12}$$

Thus the first and third term of the last expression on the right hand side of (3.10) vanish: after a suitable change of indices we find

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}DX^i = \bar{g}_{\delta\gamma}\left[dU^\delta + \left\{\begin{matrix}\delta\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} U^\alpha du^\beta\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}U^\alpha\left(dx'^k - \frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta}du^\beta\right). \tag{3.13}$$

having applied (3.6) to the third term of (3.10).

Now the geodesic Γ of F_n determines uniquely a geodesic $\bar{\Gamma}$ of F_m in the neighbourhood of A which it touches at A. The tangent vector x'^k at A of Γ is a function of u^α and u'^α, the latter being tangent vector to $\bar{\Gamma}$ at A. $\bar{\Gamma}$ is analogously to (3.8) represented by

$$du'^\lambda + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\beta\end{matrix}\right\}_{(u,u')} u'^\mu du^\beta = 0, \tag{3.14}$$

and we have

$$dx'^k - \frac{\partial x'^k}{\partial u^\beta}du^\beta = \frac{\partial x'^k}{\partial u'^\beta}du'^\beta, \tag{3.15}$$

where dx'^k refers to Γ and du'^β is given by (3.14).

Also, if we differentiate (2.9) with respect to u'^β, we have

$$\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\gamma}(u,u')}{\partial u'^\beta} = \frac{\partial g_{ij}(x,x')}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial u'^\beta}$$

since the elements of the matrix (2.5) are independent of direction. Substituting (3.15) in the last expression on the right-hand side of (3.13) and making use of our last equation, this expression becomes

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\gamma}(u,u')}{\partial u'^\lambda}du'^\lambda U^\alpha = \frac{1}{2}\bar{g}_{\delta\gamma}(u,u')\cdot\bar{g}^{\delta\varepsilon}(u,v)\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\varepsilon}(u,u')}{\partial u'^\lambda}du'^\lambda U^\alpha$$

in virtue of (2.20). On substituting this expression in (3.13) and using equation (3.14) in order to express du'^λ we finally obtain

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}DX^i = \bar{g}_{\delta\gamma}\left\{dU^\delta + \left[\left\{\begin{matrix}\delta\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\bar{g}^{\delta\varepsilon}\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\varepsilon}}{\partial u'^\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\beta\end{matrix}\right\}u'^\mu\right]U^\alpha du^\beta\right\}.$$

Comparing this with (3.3) we have the desired relation

$$g_{ij}(x,x')\frac{\partial x^j}{\partial u^\gamma}DX^i = \bar{g}_{\alpha\gamma}(u,u')\,\bar{D}U^\alpha. \tag{3.16}$$

We repeat once more that in this formula X^i is a vector field of F_m; x'^i (or u'^α) are the unit vectors in the direction of the displacement AB. Equation (3.16) is a direct generalisation of the corresponding relation in Riemannian Geometry[12]).

§ 4.
The Normal Cone.

At each point A of F_m we construct the tangents to the m coordinate curves of parameter $u_1, \ldots, u_m$. These are the m vectors, whose n

[12]) Cf. [10], p. 74.

components with respect to F_n are given by $\partial x^i/\partial u^\alpha$. Corresponding to the m independent variables u^α there exist m such independent vector fields in F_m, in terms of which any vector field of F_m is linearly expressible.

Consider a given direction x'^i (or u'^α) in F_m at the point A. Any unit vector $n^{*i}(x, x')$ satisfying the m equations

$$g_{ij}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} n^{*j}(x, x') = 0 \tag{4.1}$$

is said to be a *unit normal to F_m with respect to the direction x'^i of F_m*. Since the rank of the matrix (2.5) is m, there exist $n - m$ linearly independent vectors satisfying (4.1). In the case of a *hypersurface* ($m = n - 1$) we then have one such vector corresponding to each direction x' of F_m at A. When we consider the totality of tangential directions x' of F_m at A we thus obtain a cone of directions, which we shall call the *normal cone*. This cone plays a fundamental rôle in the geometrical theory of hypersurfaces.

On the other hand, the unit vectors n^i which satisfy the m equations

$$g_{ij}(x, n) \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} n^j = 0 \tag{4.2}$$

are said to be *unit normal vectors* of F_m; they are independent of direction and at each point A of F_m there exist $n - m$ linearly independent vectors satisfying (4.2). In the case of a hypersurface (4.2) defines uniquely a single normal vector n^i. In order to bring out clearly the difference between n^i and n^{*i} we shall briefly outline the geometrical constructions by which both vectors may be obtained (for the case $m = n - 1$). In the Minkowskian tangent space $T_n(A)$ the tangent hyperplane $T_{n-1}(A)$ to F_{n-1} is defined by the $(n - 1)$ vectors $\partial x^i/\partial u^\alpha$. Construct a hyperplane parallel to $T_{n-1}(A)$ touching the indicatrix $F(x, x') = 1$ in $T_n(A)$. As a result of the convexity of the indicatrix there are two possible points of contact, say A' and A''. It is easily verified that the vectors AA', AA'' of $T_n(A)$ both satisfy (4.2) in virtue of (2.1); by laying down a suitable convention for the sign of n^i (as in euclidean geometry) we choose one of these, which will then be the unique normal n^i. In order to obtain $n^{*i}(x, x'_{(0)})$ (for a given direction $x'_{(0)}$) we construct in $T_n(A)$ the ellipsoid e: $g_{ij}(x, x'_{(0)})\, x'^i\, x'^j = 1$, ($x'_{(0)}$ fixed, x'^i variable). Once more we find points B, B' of e which are the points of contact of e with hyperplanes parallel to $T_{n-1}(A)$; again it follows that the vectors AB, AB' of $T_n(A)$ satisfy (4.1) (with $x' = x'_{(0)}$). Once more a suitable convention of signs selects one of these vectors, which is $n^{*i}(x, x'_{(0)})$.

We may remark that in the case of a locally euclidean metric the indicatrix $F(x, x') = 1$ is simply the ellipsoid e (which is then independent of the choice of the direction $x'_{(0)}$). Consequently n^i and n^{*i} would coincide and reduce to the usual normal vector. It is interesting to note that when the restrictive assumption of a locally euclidean geometry

is abandoned *we have to replace the normal vector by a vector and a cone which together take over the rôle of the normal vector in euclidean geometry.*

We now return to (3.16) for a preliminary analysis of this equation. Let us consider first the process of covariant differentiation of a vector field X^i of F_m along a curve C of F_m. If this vector field is parallel along C with respect to the embedding space F_n, i.e. $DX^i/Ds = 0$ along C, it follows from (3.16) that $\bar{D}U^x/Ds = 0$ along C. Hence we have the result:

If a vector field of a subspace is parallel with respect to the enveloping space along a curve of the subspace it is also parallel with respect to the subspace.

In particular, if C is a geodesic of F_n and X^i (or U^x) its unit tangent vector (i.e. $DX^i/Ds = 0$), it follows that $\bar{D}U^x/Ds = 0$. Thus:

If a curve is a geodesic of the enveloping space, it is a geodesic of any subspace in which it lies.

This result is of primary importance as we shall see later. On the other hand, if the vector field U^x is parallel with respect to F_m along C, i.e. $\bar{D}U^x/Ds = 0$, we find on comparison with (3.16) and (4.1)

$$\frac{DX^i}{Ds} = \sum_{p=m+1}^{n} \lambda_{(p)}(x, x', X)\, n^{*i}_{(p)}(x, x') \tag{4.3}$$

where the x'^i are the components of the unit tangent vector of C and the $\lambda_{(p)}$ are scalar factors which we shall evaluate explicity in Part II. We thus have:

In order that a vector field of F_m be parallel with respect to F_m along a curve C of F_m it is necessary and sufficient that its covariant derivative with respect to the enveloping space be normal to F_m with respect to the tangent vector of C.

In particular, let U^x be the unit tangent vector to a geodesic of a hypersurface F_{n-1}. Then it follows that:

If a geodesic of F_{n-1} is not a geodesic of the enveloping space F_n (when regarded as a curve of F_n) its principal normal is normal to F_{n-1} with respect to the direction of its tangent vector[13]).

These theorems are all generalisations of well-known theorems of classical differential geometry[14]).

In the case of a hypersurface equation (3.16) admits of a singularly striking interpretation in a Finsler space. In view of (2.9) we can write (3.16) in the form

$$g_{ij}(x, x')\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{DX^i}{Ds} = g_{ij}(x, x')\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\cdot\frac{\bar{D}U^\beta}{Ds} \tag{4.4}$$

[13]) The principal normal of a curve is the covariant derivative of its unit tangent vector. Cf. [7], § 6.

[14]) Cf. [10], loc. cit.

or, if we denote the components of $\bar{D}U^\beta/Ds$ with respect to F_n by

$$\frac{\delta X^i}{\delta s} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\bar{D}U^\beta}{Ds} \tag{4.5}$$

equation (4.4) becomes

$$g_{ij}(x, x') \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \left(\frac{DX^i}{Ds} - \frac{\delta X^i}{\delta s} \right) = 0. \tag{4.6}$$

Comparing this with (4.1) we see that the vector $\frac{DX^i}{Ds} - \frac{\delta X^i}{\delta s}$ is normal to F_m with respect to the direction x', and we may put once more

$$\frac{DX^i}{Ds} = \sum_{p=m+1}^{n} \lambda_{(p)}(x, x', X)\, n^{*i}_{(p)}(x, x') + \frac{\delta X^i}{\delta s}. \tag{4.7}$$

When $m = n-1$ this result shows *that $\delta X^i/\delta s$ is the projection of DX^i/Ds onto the tangent hyperplane to F_{n-1} at the point A, the generating vector $n^{*i}(x, x')$ of the normal cone being used during the process of projection.*

In particular, if C is once more a geodesic of F_{n-1}, X^i being its unit tangent vector, (4.7) reduces to

$$\frac{DX^i}{Ds} = \lambda(x, x')\, n^{*i}(x, x'). \tag{4.8}$$

Since n^{*i} is a unit vector, λ is the length of the principal normal of C, which, however, is its curvature when regarded as a curve in F_n[15]). Denoting the latter by $\varrho^{-1}(x, x')$ we see that for a hypersurface

$$\frac{DX^i}{Ds} = \frac{n^{*i}(x, x')}{\varrho(x, x')} + \frac{\delta X^i}{\delta s} \tag{4.9}$$

when X^i is the unit tangent vector to any curve of F_{n-1} touching the geodesic C of F_{n-1} in the point A.

In Part II we shall see that with the aid of a generalisation of the theorem of Meusnier this last result can be brought into close connection with the second fundamental form of the hypersurface. We shall then be in a position to generalise (4.9) to the case when X^i is an arbitrary vector field of F_{n-1} by abandoning the condition that the X^i are unit tangent vectors to a curve of a F_{n-1}. This will lead to an explicit expression for DX^i/Ds and $\delta X^i/\delta s$.

Bibliography.

[1] Cartan, E.
Les Espaces de Finsler. Actualités **79** (Paris 1934).

[2] Berwald, L.
Über die Hauptkrümmungen einer Fläche im dreidimensionalen Finslerschen Raum. Mh. Math. Phys. **43**, 1—14 (1936).

[3] Wegener, J. M.
Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen. Mh. Math. Phys. **44**, 115—130 (1936).

[15]) Cf. [7], § 6.

[4] Haimovici, M.
Les formules fondamentales dans la theorie des hypersurfaces d'un espace général. Ann. sci. Univ. Jassy **20**, 39—58 (1935).

[5] Hombu, H.
Die Krümmungstheorie im Finslerschen Raum. J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. (1) **5**, 67—94 (1936/37).

[6] Davies, E. T.
Subspaces of a Finsler space. Proc. Lond. Math. Soc. **49**, 19—39 (1947).

[7] Rund, H.
Über die Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen. Math. Z. **54**, 115—128 (1951).

[8] Rund, H.
Eine Krümmungstheorie in Finslerschen Räumen. Math. Ann. **125**, 1—18 (1952).

[9] Rund, H.
Zur Begründung der Differentialgeometrie in Minkowskischen Räumen. Archiv der Math. **3**, 60—69 (1952).

[10] Eisenhart, L. P.
Riemannian Geometry. Princeton 1926.

(Eingegangen am 5. Februar 1952.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 376—387 (1952).

Über den Fundamentalsatz von Maschke zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen.

Von

Wolfgang Gaschütz in Kiel.

1. Von H. MASCHKE[1]) wurde 1898 zum erstenmal der für die Darstellungstheorie endlicher Gruppen grundlegende Satz bewiesen, daß jede Darstellung einer endlichen Gruppe im komplexen Zahlkörper vollreduzibel ist. MASCHKE benutzte dabei die Tatsache, daß sich jede solche Darstellung auf unitäre Gestalt transformieren läßt. Sein Beweisverfahren ist dadurch im wesentlichen an den komplexen Zahlkörper gebunden.

Einen neuen sehr einfachen Beweis gab 1905 I. SCHUR[2]). Er gestattet eine Verallgemeinerung des Satzes von MASCHKE. Dazu wendet man ihn am besten als Aussage über Darstellungsmoduln oder, allgemeiner, über $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln, d.h. Moduln[3]) mit einem Schiefkörper Ω als eigentlichen Rechts- und einer endlichen Gruppe $\mathfrak{g}$ als eigentlichen Ω-Linksoperatorenbereich. Ist G die Ordnung von $\mathfrak{g}$, so kann man nach SCHUR[4]) bekanntlich beweisen: Wenn

$$\text{Charakteristik } \Omega \nmid G, \tag{1.1}$$

so ist jeder $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul eines $\mathfrak{g}$-Ω-Moduls direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand in diesem.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich damit, in weiterer Ausgestaltung des Beweisgedankens von SCHUR diejenigen $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln $\mathfrak{a}$ zu bestimmen, die sich aus jedem $\mathfrak{g}$-Ω-Modul als direkter Summand abspalten lassen, welcher $\mathfrak{a}$ entweder als einen $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul oder als einen $\mathfrak{g}$-Ω-Restklassenmodul enthält. Derartige Moduln $\mathfrak{a}$ nennen wir zur Erinnerung an MASCHKE $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln; sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die zugehörige Darstellung aus jeder umfassenden Darstellung voll herausreduziert werden kann.

Wir verallgemeinern die Untersuchung von vornherein dadurch, daß wir für Ω an Stelle eines Körpers einen ganz beliebigen Rechtsoperatorenbereich zulassen, und verfeinern sie zugleich, indem wir die Eigenschaft der „unteren Abspaltbarkeit" ($\mathfrak{a}$ Teilmodul: Fall u) von der „oberen Abspaltbarkeit" ($\mathfrak{a}$ Restklassenmodul: Fall o) begrifflich trennen; nachträglich stellt sich heraus, daß beide Eigenschaften gleichwertig sind.

[1]) MASCHKE, H., Math. Ann. **52**, 363 (1899).

[2]) SCHUR, I., Sber. Pr. Akad. d. Wiss. 1905 insbes. § 3, S. 415f.

[3]) Nicht notwendig endlich über Ω.

[4]) Siehe etwa JACOBSON, N., The Theory of Rings, New York 1943, Chapt. 4, Theorem 46.

Das Hauptergebnis, Satz 1, bestehend aus zwei dualen Hälften 1u und 1o, wird in Abschnitt 2 formuliert. Der Beweis nimmt die Abschnitte 3—5 in Anspruch. In Abschnitt 6 werden einige Anwendungen gegeben: Zunächst der Nachweis, daß sich die oben erwähnte, von SCHUR gegebene Verallgemeinerung des Satzes von MASCHKE unserer Charakterisierung der $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln einfach unterordnet. Ferner wird dort gezeigt, daß für Schiefkörper Ω eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ in Ω dann und nur dann voll aus dem regulären $\mathfrak{g}$-Ω-Darstellungsmodul herausreduziert werden kann, wenn der zu ihr gehörige Darstellungsmodul $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul ist. Satz 1 kann daher bei der Ausreduktion einer explizit gegebenen regulären Darstellung über Körpern, deren Charakteristik die Gruppenordnung teilt, nützlich sein. Als weitere Beispiele werden zyklische Moduln, unter $\mathfrak{g}$ elementweise invariante Moduln und monomiale Moduln behandelt. Die $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln unter ihnen lassen sich besonders einfach mit Hilfe von Satz 1 kennzeichnen. Schließlich wird ein Zusammenhang der $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln mit den von E. ARTIN [5]) eingeführten Zerfällungsgruppen für Faktorensysteme hergestellt, der zu einer Verallgemeinerung eines Satzes von I. SCHUR [6]) über zerfallende Faktorensysteme führt.

2. Es bezeichne $\mathfrak{a}$ eine additiv geschriebene Gruppe, die einen beliebigen (eventuell leeren) Bereich Ω von Rechtsoperatoren besitzt, und zu der eine Gruppe $\mathfrak{g}$ der endlichen Ordnung G als eigentlicher Ω-Linksoperatorenbereich erklärt ist. Es gelte also im einzelnen für $a, b \in \mathfrak{a}$; $g, h \in \mathfrak{g}$; $\omega \in \Omega$:

$$(2.1)\quad \begin{cases} a\,\omega \in \mathfrak{a} & g\,a \in \mathfrak{a} \\ (a+b)\,\omega = a\,\omega + b\,\omega & g(a+b) = g\,a + g\,b \\ & (g\,h)\,a = g\,(h\,a), \quad 1a = a \\ & (g\,a)\,\omega = g\,(a\,\omega)\,. \end{cases}$$

Wird Ω als Ring angenommen, so soll ferner für $1, \omega, \pi \in \Omega$ gelten:

$$(2.2)\qquad a(\omega+\pi) = a\,\omega + a\,\pi, \quad (a\,\omega)\,\pi = a(\omega\,\pi), \quad a\,1 = a.$$

Im folgenden werden wir $\mathfrak{a}$ in zweifacher Weise zu betrachten haben: 1. Als Gruppe mit dem Operatorenbereich Ω, jedoch ohne Berücksichtigung der Gruppe $\mathfrak{g}$ als Operatorenbereich. Dann sprechen wir von $\mathfrak{a}$ als *Ω-Modul* sowie von den *Ω-Endomorphismen*, *Ω-Teilmoduln* usw. von $\mathfrak{a}$. 2. Als Gruppe mit den Operatorenbereichen $\mathfrak{g}$ *und* Ω. Dann sprechen wir von $\mathfrak{a}$ als *$\mathfrak{g}$-Ω-Modul* sowie von den *$\mathfrak{g}$-Ω-Endomorphismen*, *$\mathfrak{g}$-Ω-Teilmoduln* usw. von $\mathfrak{a}$. Entsprechend sei

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

bzw.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$$

[5]) Siehe ZASSENHAUS, H., Lehrbuch der Gruppentheorie I, Leipzig und Berlin, 1937, S. 98.

[6]) Siehe ZASSENHAUS, H., l. c. [5]), S. 125 Satz 25, 26.

gesetzt, wenn $\mathfrak{a}$ direkte Summe der Ω- bzw. $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmoduln $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ (*direkte* Ω- bzw. $\mathfrak{g}$-Ω-*Summe*) ist. $\cong$ bezeichne stets einen $\mathfrak{g}$-Ω-*Isomorphismus*.

A sei der Ring der Ω-*Endomorphismen* von $\mathfrak{a}$. In A sind insbesondere die durch die Elemente $g \in \mathfrak{g}$ induzierten Endomorphismen enthalten, die wir ebenfalls mit g bezeichnen wollen. Die Anwendung der Elemente von A auf die von $\mathfrak{a}$ schreiben wir daher unmißverständlich wie die Operatoren aus $\mathfrak{g}$ als Linksmultiplikationen.

Wegen der Dualität der sich auf u und o beziehenden Aussagen wollen wir im folgenden beide Fälle gleichzeitig, durch einen senkrechten Strich getrennt behandeln. Text, der gleichlautet, ist dabei der Kürze halber über die ganze Seite gesetzt.

Einen $\mathfrak{g}$-Ω-Modul $\mathfrak{b}$ nennen wir eine

u-Erweiterung	*o-Erweiterung*

von $\mathfrak{a}$ *über* $\tilde{\mathfrak{a}}$, wenn $\mathfrak{a}$ mit

einem $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul $\tilde{\mathfrak{a}}$	dem Restklassenmodul $\mathfrak{b}/\tilde{\mathfrak{a}}$ nach einem $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul $\tilde{\mathfrak{a}}$

von $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorph und

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}^* \tag{2.3}$$

mit einem Ω-Teilmodul $\mathfrak{a}^*$ von $\mathfrak{b}$ ist.

Wir betrachten nun $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln $\mathfrak{a}$, für die die folgende Aussage

M_u	M_o

gilt:

Ist $\mathfrak{b}$ *eine*

u-Erweiterung	*o-Erweiterung*

von $\mathfrak{a}$ *über* $\tilde{\mathfrak{a}}$, *so ist*

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}}$$

mit einem $\mathfrak{g}$-Ω-*Teilmodul* $\bar{\mathfrak{a}}$ *von* $\mathfrak{b}$. Solche $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln sollen

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-*Moduln*	$\mathfrak{g}$-Ω-M_o-*Moduln*

genannt werden. Ist Ω ein Schiefkörper, so ist bekanntlich (2.3) stets erfüllt. Die

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Moduln	$\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Moduln

$\mathfrak{a}$ sind dann also diejenigen $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln, für die in jedem $\mathfrak{g}$-Ω-Modul $\mathfrak{b}$, in dem ein mit $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorpher

$\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul	Restklassenmodul nach einem $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul

enthalten ist, ein mit $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorpher direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand von $\mathfrak{b}$

existiert. Ist darüber hinaus $\mathfrak{a}$ endlich in bezug auf Ω, also in bekannter Terminologie $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-*Darstellungsmodul*, so hat das für die durch $\mathfrak{a}$ induzierte Darstellungsklasse zur Folge, daß genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul und $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul ist, jede ihrer Darstellungen sich aus allen umfassenderen Darstellungen voll herausreduzieren läßt.

Wir wollen die folgende Charakterisierung der

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Moduln | $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Moduln

beweisen:

Satz 1 *u*|*o*. $\mathfrak{a}$ *ist dann und nur dann*

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-*Modul*, | $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-*Modul*,

wenn $\alpha \in \mathsf{A}$ *existiert, so daß in* A

$$\sum g\,\alpha\,g^{-1} = 1 \quad (2.4)$$

[7])

ist. Insbesondere sind also die Begriffe $\mathfrak{g}$-Ω-M_u- *und* $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-*Modul identisch.*

3. Zunächst zeigen wir: Aus der Existenz von $\alpha \in \mathsf{A}$ mit (2.4) folgt, $\mathfrak{a}$ ist

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul. | $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul.

Es sei $\mathfrak{b}$ eine

u-Erweiterung | *o*-Erweiterung

von $\mathfrak{a}$ über $\tilde{\mathfrak{a}}$. Ist B der Ring der Ω-Endomorphismen von $\mathfrak{b}$ und

$$b = \varkappa^* b + (1 - \varkappa^*) b$$

die (2.3) entsprechende Komponentenzerlegung von $b \in \mathfrak{b}$, so sind die Abbildungen

$$\varkappa^* = \{b \to \varkappa^* b\} \quad \text{und} \quad (1 - \varkappa^*) = \{b \to (1 - \varkappa^*) b\}$$

Elemente aus B. Auf Grund von (2.3) ist ferner jeder Ω-Endomorphismus von

$\tilde{\mathfrak{a}}$ | $\mathfrak{b}/\tilde{\mathfrak{a}}$

zu einem Element aus B fortsetzbar. Da $\mathfrak{a}$ mit

$\tilde{\mathfrak{a}}$ | $\mathfrak{b}/\tilde{\mathfrak{a}}$

$\mathfrak{g}$-Ω-isomorph ist, existiert nach (2.4) also $\beta \in \mathsf{B}$ mit

$(\sum g\,\beta\,g^{-1})\,a = a$ für $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$. | $(\sum g\,\beta\,g^{-1})\,b \equiv b \bmod \tilde{\mathfrak{a}}$ für $b \in \mathfrak{b}$.

Da

$\varkappa^* a = a$ für $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$, | $(1 - \varkappa^*)\,b \equiv b \bmod \tilde{\mathfrak{a}}$,

[7]) Hier und später bedeute $\sum$ die Summe über alle Elemente $g \in \mathfrak{g}$.

ist auch

(3.1u)	(3.1o)
$(\sum g\varkappa^*\beta g^{-1})a = a$	$(\sum g\beta(1-\varkappa^*)g^{-1})b \equiv b \bmod \tilde{\mathfrak{a}}$
für $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$.	für $b \in \mathfrak{b}$.

Setzen wir

(3.2u) $\bar{\varkappa} = \sum g\varkappa^*\beta g^{-1}$, | $\bar{\varkappa} = 1 - \sum g\beta(1-\varkappa^*)g^{-1}$, (3.2$o$)

so ist

(3.3) $\bar{\varkappa} h = h\bar{\varkappa}$ für $h \in \mathfrak{g}$

unmittelbar einzusehen,

(3.4) $\bar{\varkappa} a = a$ für $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$

nach (3.1u), | nach (3.2o), da $(1-\varkappa^*)g^{-1}a = 0$,

(3.5) $\bar{\varkappa} b \in \tilde{\mathfrak{a}}$ für $b \in \mathfrak{b}$

nach (3.2u), da $g\varkappa^* b \in \tilde{\mathfrak{a}}$. | nach (3.1$o$).

Aus (3.4) und (3.5) folgt ferner

(3.6) $\bar{\varkappa}\bar{\varkappa} = \bar{\varkappa}$.

Daher ist

(3.7) $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}}$

mit $\bar{\mathfrak{a}} = (1-\bar{\varkappa})\mathfrak{b}$. Denn aus $a = \bar{\varkappa}a = (1-\bar{\varkappa})\mathfrak{b}$, $a \in \tilde{\mathfrak{a}}$, $b \in \mathfrak{b}$, folgt $\bar{\varkappa}(a+b) = b$ und hieraus [nach (3.6)] $\bar{\varkappa}a = a = 0$. Jedes $b \in \mathfrak{b}$ gestattet die Darstellung $b = \bar{\varkappa}b + (1-\bar{\varkappa})b$ mit $\bar{\varkappa}b \in \tilde{\mathfrak{a}}$ [nach (3.5)] und $(1-\bar{\varkappa})b \in \bar{\mathfrak{a}}$ (nach Def.). Schließlich ist $\tilde{\mathfrak{a}}$ nach Voraussetzung und $\bar{\mathfrak{a}}$ nach (3.3) $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul von $\mathfrak{b}$. (3.7) und die Voraussetzung über $\mathfrak{b}$ ergeben, daß $\mathfrak{a}$

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul | $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul

ist.

4. Um den zweiten Teil des Beweises zu Satz 1 $u|o$ führen zu können, muß eine Zwischenbetrachtung eingeschaltet werden.

Zu einem Ω-Modul $\mathfrak{a}$ sei $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ die Menge der Linearkombinationen von G Unbestimmten t_g mit Koeffizienten aus $\mathfrak{a}$, die in der üblichen Weise addiert werden sollen:

$$\sum a_g t_g + \sum b_g t_g = \sum (a_g + b_g) t_g.$$

Wird dann

$$(\sum a_g t_g)\,\omega = \sum (a_g\,\omega)\, t_g$$

gesetzt, so ist Ω Rechtsoperatorenbereich von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ gemäß (2.1) und, gegebenenfalls, (2.2). Setzt man ferner

(4.1) $$h \sum a_g t_g = \sum a_g t_{gh^{-1}} = \sum a_{gh} t_g,$$

so ist

$$\begin{aligned} h_1 (h_2 \sum a_g t_g) &= h_1 \sum a_{g h_2} t_g \\ &= \sum a_{g h_1 h_2} t_g \\ &= (h_1 h_2) \sum a_g t_g \\ 1 \sum a_g t_g &= \sum a_g t_g \\ h \left[(\sum a_g t_g) \omega \right] &= h \sum (a_g \omega) t_g \\ &= \sum (a_{g h} \omega) t_g \\ &= (h \sum a_g t_g) \omega \end{aligned}$$

und $\mathfrak{g}$ also Ω-Linksoperatorenbereich von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ gemäß (2.1), $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ also $\mathfrak{g}$-Ω-Modul. Wir nennen $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ *den regulären* $\mathfrak{g}$-Ω-*Modul über* $\mathfrak{a}$.

Hilfssatz 1 $u\,|\,o$. Im Ω-Endomorphismenbereich von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ existiert ein Element β mit

$$\sum g \beta g^{-1} = 1. \tag{4.2}$$

$\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ ist also nach dem bisher zu Satz 1 $u\,|\,o$ Bewiesenen $\mathfrak{g}$-Ω-M_u- und $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul.

Ist $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-Modul, so enthält $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ einen $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul $\tilde{\mathfrak{a}}$, so daß $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$

u-Erweiterung $\qquad\qquad$ o-Erweiterung

von $\mathfrak{a}$ über $\tilde{\mathfrak{a}}$ ist.

Beweis. Zum Nachweis der ersten Behauptung verifiziert man leicht, daß die Abbildung

$$\beta = \{\sum a_g t_g \to a_1 t_1\}$$

ein Ω-Endomorphismus von $\mathfrak{b}$ ist, für den, (4.1) zufolge, (4.2) gilt.

Auf Grund von (4.1) ergibt sich ferner, daß

die Menge der Elemente der Form

$$\sum (g a) t_g$$

ein $\mathfrak{g}$-Ω-Teilmodul von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ ist, der sich auf Grund der eineindeutigen Abbildung

$$\lambda = \{a \to \sum (g a) t_g\}$$

mit $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorph erweist. Bezeichnen wir diesen mit $\tilde{\mathfrak{a}}$, so ist also

$$\mathfrak{a} \cong \tilde{\mathfrak{a}}.$$

die Abbildung

$$\lambda = \{\sum a_g t_g \to \sum g^{-1} a_g\}$$

ein $\mathfrak{g}$-Ω-Homomorphismus von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}$ ist, für den $\lambda(a\, t_1) = a$, also jedes Element aus $\mathfrak{a}$ Bild ist. Bezeichnen wir den Kern von λ mit $\tilde{\mathfrak{a}}$, so ist also

$$\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/\tilde{\mathfrak{a}}.$$

Ist ferner $\mathfrak{a}^*$ der Ω-Teilmodul der Elemente

$$\sum a_g t_g, \quad a_1 = 0, \qquad\qquad a\, t_1,$$

so wird

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}^*;$$

$\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ ist daher

u-Erweiterung | o-Erweiterung

von $\mathfrak{a}$ über $\tilde{\mathfrak{a}}$.

5. Wir beenden nun den Beweis zu Satz 1 u o, indem wir zeigen: Ist $\mathfrak{a}$

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul, | $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul,

so existiert $\alpha \in \mathsf{A}$ mit (2.4). Dazu beweisen wir etwas allgemeiner

Hilfssatz 2. Es sei $\mathfrak{b}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-Modul und

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}} \tag{5.1}$$

mit $\mathfrak{g}$-Ω-Moduln $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$. Existiert dann im Ω-Endomorphismenring B von $\mathfrak{b}$ ein Element β mit

$$\sum g \beta g^{-1} = 1, \tag{5.2}$$

so existiert auch im Ω-Endomorphismenring $\tilde{\mathsf{A}}$ von $\tilde{\mathfrak{a}}$ und im Ω-Endomorphismenring $\bar{\mathsf{A}}$ von $\bar{\mathfrak{a}}$ ein Element $\tilde{\alpha}$ bzw. $\bar{\alpha}$ mit

$$\sum g \tilde{\alpha} g^{-1} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum g \bar{\alpha} g^{-1} = 1.$$

Ist $\mathfrak{a}$

$\mathfrak{g}$-Ω-M_u-Modul, | $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul,

so erfüllt nach Definition $M_u | M_o$ und Hilfssatz 1 $u | o$ der reguläre $\mathfrak{g}$-Ω-Modul $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ die in Hilfssatz 2 über $\mathfrak{b}$ gemachten Voraussetzungen. Da

$\mathfrak{a} \cong \tilde{\mathfrak{a}}$, | $\mathfrak{a} \cong \bar{\mathfrak{a}}$,

existiert nach Hilfssatz 2 auch $\alpha \in \mathsf{A}$ mit (2.4), und Satz 1 $u | o$ ist mit Hilfssatz 2 bewiesen.

Beweis zu Hilfssatz 2. Wir können uns auf den Nachweis für eine Komponente, etwa $\tilde{\mathfrak{a}}$, beschränken.

Es sei

$$b = \varkappa b + (1 - \varkappa) b$$

die (5.1) entsprechende Komponentenzerlegung von $b \in \mathfrak{b}$. Dann ist $\varkappa \in \mathsf{B}$,

$$g \varkappa = \varkappa g \tag{5.3}$$

und

$$\varkappa \varkappa = \varkappa. \tag{5.4}$$

$\varkappa$ induziert die Zerlegung

$$\mathsf{B} = \varkappa \mathsf{B} \varkappa + (1 - \varkappa) \mathsf{B} \varkappa + \varkappa \mathsf{B} (1 - \varkappa) + (1 - \varkappa) \mathsf{B} (1 - \varkappa), \tag{5.5}$$

die zufolge (5.4) eine direkte Zerlegung des Ringes B ist. Dabei ist

$$1 = \varkappa + 0 + 0 + (1 - \varkappa) \tag{5.6}$$

die (5.5) entsprechende Komponentenzerlegung des Einselementes von B. Durch Einsetzen von (5.2) in (5.5) und Vergleich von (5.5) und (5.6) folgt

$$\varkappa \sum g \beta g^{-1} \varkappa = \varkappa$$

und nach (5.3)

$$\sum g \varkappa \beta \varkappa g^{-1} = \varkappa. \tag{5.7}$$

Auf die Elemente aus $\tilde{\mathfrak{a}}$ angewandt sind g, $\varkappa$, $\varkappa \beta \varkappa$ Elemente aus $\tilde{\mathsf{A}}$, und es entspricht dabei $\varkappa$ dem Einselement von $\tilde{\mathsf{A}}$. Bezeichnen wir den durch $\varkappa \beta \varkappa$ induzierten Ω-Endomorphismus von $\tilde{\mathfrak{a}}$ mit $\bar{\alpha}$, so ergibt sich aus (5.7)

$$\sum g \bar{\alpha} g^{-1} = 1;$$

w. z. b. w.

Wir wollen im folgenden wegen des Übereinstimmens der Begriffe $\mathfrak{g}$-Ω-M_u- und $\mathfrak{g}$-Ω-M_o-Modul nur noch von $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln sprechen.

Nachdem Satz 1 $u\,o$ bewiesen ist, erweist sich Hilfssatz 2 offenbar auch mit der folgenden Aussage äquivalent: Ist $\mathfrak{b}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul und gilt (5.1), so sind auch $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln. Daß hiervon auch die Umkehrung gilt, erkennt man folgendermaßen: Sind $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Moduln, $\tilde{\mathsf{A}}$ bzw. $\bar{\mathsf{A}}$ die Ω-Endomorphismenringe von $\tilde{\mathfrak{a}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}$ und, nach Satz 1 $u\,|\,o$, $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathsf{A}}$, $\bar{\alpha} \in \bar{\mathsf{A}}$ mit

$$\sum g \tilde{\alpha} g^{-1} = 1$$

und

$$\sum g \bar{\alpha} g^{-1} = 1,$$

und ist $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}}$ mit der entsprechenden Komponentenzerlegung $b = \tilde{a} + \bar{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, so sei

$$\beta = \{b \to \tilde{\alpha}\,\tilde{a} + \bar{\alpha}\,\bar{a}\}.$$

β ist ein Ω-Endomorphismus von $\mathfrak{b}$ und

$$\sum g \beta g^{-1} = 1;$$

b also nach Satz 1 $u\,|\,o$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul. Damit gilt der (übrigens auch mit dem Krull-Schmidtschen Satz und dem 2. Isomorphiesatz aus der Definition direkt herleitbare)

Satz 2. *Sind* $\tilde{\mathfrak{a}}$ *und* $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Ω-*M-Moduln, so ist auch*

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}} \tag{5.7}$$

$\mathfrak{g}$-Ω-*M-Modul.*

Ist $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{g}$-Ω-*M-Modul, und besteht eine Zerlegung* (5.7), *so sind auch* $\tilde{\mathfrak{a}}$ *und* $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Ω-*M-Moduln.*

Aus Hilfssatz 1u oder o und Satz 2 erhalten wir ferner noch

Satz 3. *$\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul, wenn ein zu $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-isomorpher direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand des regulären $\mathfrak{g}$-Ω-Moduls $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ existiert.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1u etwa ist $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ u-Erweiterung von $\mathfrak{a}$ und nach M_u

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{a}}, \quad \tilde{\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{a}, \tag{5.8}$$

wenn $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul ist.

Besteht (5.8), so ist nach Satz 2 $\tilde{\mathfrak{a}}$ und also auch $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul, weil $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ nach Hilfssatz 1u $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul ist.

6, a. Es sei die Abbildung

$$\bar{G} = \{a \to Ga\} \tag{6.1}$$

ein Automorphismus von $\mathfrak{a}$. Dann ist auch die inverse Abbildung $\bar{G}^{-1}$ ein Automorphismus und mit $\alpha = \bar{G}^{-1}$ offenbar (2.4) erfüllt. Das ergibt

Satz 4. *Ist $\bar{G}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul.*

Ist Ω Schiefkörper, so sieht man leicht ein, daß (6.1) dann und nur dann ein Automorphismus ist, wenn Charakteristik $\Omega \nmid G$. Satz 1 $u \mid o$ enthält also in einfacher Weise die von Schur gegebene Erweiterung des Satzes von Maschke, welche wir in **1** erwähnten.

b. Es sei Ω Schiefkörper und $\mathfrak{a}$ bezüglich Ω zyklisch, d. h. bezüglich Ω von einem Element erzeugt. $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ ist dann offenbar mit dem regulären $\mathfrak{g}$-Ω-Darstellungsmodul $\mathfrak{g}$-Ω-isomorph und dieser nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul. Aus dem gegen Ende von **2** Gesagten und Satz 2 folgt sodann, daß ein Faktor einer Normalreihe des regulären $\mathfrak{g}$-Ω-Darstellungsmoduls dann und nur dann als direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand abgespaltet werden kann, wenn er $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul ist.

Zum Beispiel läßt sich die aus den folgenden Matrizen (g) bestehende (übrigens absolut irreduzible) Darstellung der nichtkommutativen Gruppe der Ordnung 6 im Primkörper P_2 der Charakteristik 2 aus jeder umfassenderen Darstellung voll herausreduzieren:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \right. \tag{6.2}$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \right\}$$

Die P_2-Endomorphismen α des zu ihr gehörigen $\mathfrak{g}$-P_2-Darstellungsmoduls haben nämlich, als Matrizen geschrieben, die folgende Gestalt

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{ik} \in P_2,$$

und es ist, (2.4) entsprechend,

$$\sum (g)\,(\alpha)\,(g)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} + \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Setzt man daher $\alpha_{11}=1$ und alle anderen $\alpha_{ik}=0$, so ist offenbar (2.4) erfüllt. Gleichzeitig hat man hierin ein einfaches Beispiel dafür, daß $M_{u,o}$ ohne (1.1) gelten kann.

In einem Körper Ω der Charakteristik 3 dagegen hat die (6.2) entsprechende (dann reduzible) Darstellung die folgende Gestalt

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Für beliebiges

$$(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{pmatrix},\qquad \alpha_{ik}\in\Omega,$$

erhält man

$$\sum (g)\,(\alpha)\,(g)^{-1}=\begin{pmatrix}0&\alpha_1\\\alpha_2&0\end{pmatrix}$$

mit gewissen $\alpha_1,\ \alpha_2\in\Omega$. Da also (2.4) für kein α bestehen kann, läßt sich diese Darstellung nicht aus jeder umfassenderen, z.B. nach dem oben Bemerkten nicht aus der regulären Darstellung von $\mathfrak{g}$ über Ω voll herausreduzieren.

c. Es sei für $\mathfrak{a}$ eine der beiden Forderungen erfüllt:

(1) A *ist kommutativ.*

(2) $g\,a=a$ *für alle* $g\in\mathfrak{g},\ a\in\mathfrak{a}$.

Dann ist offenbar in der Bezeichnungsweise von **6. a** bei beliebigem $\alpha\in\mathsf{A}$

$$\sum g\,\alpha\,g^{-1}=\bar{G}\,\alpha.$$

Ist daher die Abbildung $\bar{G}$ kein Automorphismus von $\mathfrak{a}$, so ist $\bar{G}\,\alpha\neq 1$. Satz 1 in Verbindung mit Satz 4 ergibt also

Satz 5. *Ist für* $\mathfrak{a}$ *eine der Bedingungen* (1), (2) *erfüllt, so ist* $\mathfrak{a}$ *dann und nur dann* $\mathfrak{g}$-Ω-M-*Modul, wenn* $\bar{G}$ *Automorphismus von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Zum Beispiel ist die Bedingung (1) erfüllt, wenn Ω kommutativer Ring und $\mathfrak{a}$ zyklischer Ω-Modul ist.

d. Es sei Ω ein kommutativer Körper und $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{g}$-Ω-Darstellungsmodul für eine Darstellungsklasse, die eine transitive monomiale Darstellung mit den Matrizen (g) enthält. $\alpha\in\mathsf{A}$ sei die Matrix

$$(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\alpha_{1r}\\\vdots\\\alpha_{r1}\cdots\alpha_{rr}\end{pmatrix},\qquad \alpha_{ik}\in\Omega,$$

zugeordnet. (2.4) entsprechend erhalten wir auf Grund der Monomialität aller Matrizen

$$(6.3)\quad \sum (g)\,(\alpha)\,(g)^{-1}=\begin{pmatrix}U(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{rr})&*&\cdots&**&U(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{rr})&\cdots&*\\\vdots&&\ddots&\vdots*&\cdots&*&U(\alpha_{11}+\cdots+\alpha_{rr})\end{pmatrix},$$

wobei U die Ordnung der Untergruppe ist, die die Darstellung induziert, also $G = Ur$, und die Matrix auf der rechten Seite ferner so beschaffen ist, daß die nicht in der Diagonale stehenden Elemente Summen von Elementen α_{ik}, $i \neq k$, der Matrix (α) sind. Wir entnehmen (6.3): Notwendig dafür, daß (6.3) durch geeignete Wahl von α zur Einsmatrix gemacht werden kann, ist

(6.4) $$\text{Charakteristik } \Omega \nmid U.$$

Umgekehrt kann man, wenn (6.4) erfüllt ist, $\alpha_{11} = 1/U$ und alle anderen $\alpha_{ik} = 0$ setzen, so daß (2.4) erfüllt ist. Es gilt also

Satz 6. *Eine transitive monomiale Darstellung in einem Körper läßt sich dann und nur dann aus jeder umfassenderen Darstellung und (nach* **6, b**) *dann und nur dann aus der regulären Darstellung voll herausreduzieren, wenn die Charakteristik des Darstellungskörpers die Ordnung der Untergruppe nicht teilt, die die Darstellung induziert.*

Ganz analog läßt sich bei beliebigem Ω auch die folgende Verallgemeinerung beweisen:

Satz 6′. *Es sei Ω ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a}$ direkte Summe von zyklischen Ω-Moduln, die unter $\mathfrak{g}$ transitiv permutiert werden. U sei die Ordnung der Untergruppe, die einen bestimmten der zyklischen Ω-Moduln in sich überführt.*

$\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann $\mathfrak{g}$-Ω-M-Modul, wenn $a \to Ua$, $a \in \mathfrak{a}$, ein Automorphismus von $\mathfrak{a}$ ist.

e. Der Einfachheit halber wollen wir im folgenden annehmen, daß Ω leer ist.

Nach E. Artin[5]) existiert zu jedem *Faktorensystem* c_{g_1, g_2} von $\mathfrak{g}$ in einem $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{a}$, welches den Relationen

$$c_{g_1, g_2} + c_{g_1 g_2, g_3} = g_1 c_{g_2, g_3} + c_{g_1, g_2 g_3}$$

genügt, eine (von c_{g_1, g_2} abhängige) u-Erweiterung $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ über $\mathfrak{a}$, in der Elemente

(6.5) $$c_{g_1}, c_{g_2}, c_{g_3}, \ldots$$

existieren mit

(6.6) $$c_{g_1, g_2} = c_{g_1} + g_1 c_{g_2} - c_{g_1 g_2}.$$

Man nennt $\mathfrak{b}$ eine *Zerfällungsgruppe* für c_{g_1, g_2}.

Satz 7. *Ist $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-M-Modul, so ist schon $\mathfrak{a}$ Zerfällungsgruppe für jedes Faktorensystem von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Es sei c_{g_1, g_2} ein Faktorensystem von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eine, nach Artin existierende, $\mathfrak{g}$-Erweiterung von $\mathfrak{a}$ mit Elementen (6.5), die (6.6) genügen. Wenn $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$-M-Modul ist, existiert nach Definition ein

$\mathfrak{g}$-Teilmodul $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{b}$ mit

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \bar{\mathfrak{a}}. \tag{6.7}$$

$$c^{(\mathfrak{a})}_{g_1, g_2} = c^{(\mathfrak{a})}_{g_1} + (g_1 c_{g_2})^{(\mathfrak{a})} - c^{(\mathfrak{a})}_{g_1 g_2}$$

$$c^{(\bar{\mathfrak{a}})}_{g_1, g_2} = c^{(\bar{\mathfrak{a}})}_{g_1} + (g_1 c_{g_2})^{(\bar{\mathfrak{a}})} - c^{(\bar{\mathfrak{a}})}_{g_1 g_2}$$

sei dann die (6.7) entsprechende Komponentenzerlegung von (6.6). Da $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{g}$-Teilmoduln sind, ist

$$(g_1 c_{g_2})^{(\mathfrak{a})} = g_1 c^{(\mathfrak{a})}_{g_2}$$

und

$$(g_1 c_{g_2})^{(\bar{\mathfrak{a}})} = g_1 c^{(\bar{\mathfrak{a}})}_{g_2} \in \bar{\mathfrak{a}}.$$

Ferner ist $c_{g_1, g_2} \in \mathfrak{a}$, also $c^{(\mathfrak{a})}_{g_1, g_2} = c_{g_1, g_2}$ und daher

$$c_{g_1, g_2} = c^{(\mathfrak{a})}_{g_1} + g_1 c^{(\mathfrak{a})}_{g_2} - c^{(\mathfrak{a})}_{g_1 g_2}$$

mit $c^{(\mathfrak{a})}_{g} \in \mathfrak{a}$; w. z. b. w.

Satz 6 steht zu einem Satz über zerfallende Faktorensysteme, dessen Grundgedanke ebenfalls auf I. Schur[6]) zurückgeht in einem ähnlichen Verhältnis wie Satz 1 zu Satz 4. Jedoch ist ein $\mathfrak{g}$-Modul, in dem jedes Faktorensystem zerfällt, nicht immer ein $\mathfrak{g}$-M-Modul.

Kombiniert man Satz 6′ und Satz 7, so erhält man eine Aussage, die mit einem nach M. Hall[8]) von Artin herrührenden Satz verwandt ist.

Nach Satz 7 stellt der reguläre $\mathfrak{g}$-Modul über $\mathfrak{a}$ eine gewissermaßen kanonische Zerfällungsgruppe für jedes Faktorensystem in $\mathfrak{a}$ dar.

Die vorstehenden Betrachtungen über Faktorensysteme und insbesondere Satz 7 lassen sich ausdehnen auf beliebige *n-Kohomologiegruppen*[9]) (der Fall $n = 2$ behandelt die Faktorensysteme). In den $\mathfrak{g}$-M-Moduln hat man dann geeignete Mittel zur Verallgemeinerung der von G. Hochschild[10]), D. K. Faddeev[11]) u. a. bewiesenen Reduktionssätze. Darauf soll in einer späteren Arbeit näher eingegangen werden.

[8]) Hall, M., Ann. of Math. (II) **39**, 228 (1938).

[9]) Siehe Eilenberg, S., and S. MacLane, Ann. of Math. (II) **48**, 51—78 (1947).

[10]) Hochschild, G., Ann. of Math. (II) **46**, 58—67 (1945) und **47**, 568—579 (1946).

[11]) Faddeev, D. K., Doklady Akad. Nauk SSSR, n. s. **58**, 361—364 (1947).

(Eingegangen am 1. November 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 388—408 (1952).

Das Randwertproblem eines linearen elliptischen Systems *).

Von

Günter Hellwig in Berlin-Charlottenburg.

Wir betrachten das Randwertproblem eines allgemeinen linearen elliptischen Systems. Es sei F ein von einer geschlossenen, stetig gekrümmten, doppelpunktslosen Kurve R begrenztes Gebiet der x^1, x^2-Ebene. Vorgegeben ist das System

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{L}^1 &\equiv a^1 u_{x^1} + a^2 u_{x^2} + b^1 v_{x^1} + b^2 v_{x^2} - d u - e v - f = 0 \\ \mathfrak{L}^2 &\equiv \bar{a}^1 u_{x^1} + \bar{a}^2 u_{x^2} + \bar{b}^1 v_{x^1} + \bar{b}^2 v_{x^2} - \bar{d} u - \bar{e} v - \bar{f} = 0, \end{aligned}$$

welches in dem durch R abgeschlossenen Gebiet $F + R$ elliptisch ist. Die Koeffizienten $a^1 \ldots b^2$, $\bar{a}^1 \ldots \bar{b}^2$ seien in $F + R$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen von x^1, x^2; $d, e, f, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$ sind in $F + R$ einmal stetig differenzierbar. Gesucht werden Funktionenpaare $u = u(x^1, x^2)$, $v = v(x^1, x^2)$, welche in $F + R$ stetig und im offenen Gebiet F stetig differenzierbar sind, dem System (1) genügen, sowie auf dem Rande R die Randbedingung $u(s) = u_0(s)$ erfüllen. Dabei ist $u_0(s)$ eine willkürlich vorgegebene zweimal stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge s auf R, wie der Einfachheit halber angenommen werden soll. Die dabei verwendete Sprechweise: in $F + R$ stetig bzw. stetig differenzierbar usw., ist im Sinne der von L. Lichtenstein eingeführten Definition zu verstehen. (Enzykl. math. Wiss. II 3/1, S. 191—192.)

Die ersten Untersuchungen zu dieser Fragestellung stammen von Hilbert[1]). Kürzlich hat H. Beckert[2]) diese Untersuchungen auf n Systeme mit n gesuchten Funktionen und allgemeinere Randbedingungen ausgedehnt.

Die Ergebnisse, die man bei diesen Untersuchungen erhält, lauten für das obige Randwertproblem folgendermaßen:

I. Wenn das homogene Randwertproblem (1) ($f = \bar{f} = 0$, $u = 0$ *auf* R) *außer* $u = 0$, $v = 0$ *kein Lösungssystem* u, v *besitzt derart, daß* u *auf der Randkurve* R *verschwindet, so hat das inhomogene Randwertproblem* (1)

*) Diese und die vorangegangene Abhandlung [Fußnote 3)] stellen die Habilitationsschrift (Techn. Univ. Berlin-Charlottenburg 1951) des Verf. dar.

[1]) Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 213—219. Leipzig 1924.

[2]) Beckert, H., Über lineare elliptische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Math. Nachr. 5, 173—208 (1951).

stets notwendig ein Lösungssystem u, v derart, daß u auf R die vorgeschriebenen Werte $u_0(s)$ annimmt.

II. Im entgegengesetzten Falle, d.h. wenn es ein Lösungssystem u, v des homogenen Randwertproblems (1) *gibt, daß u auf R verschwindet und die Funktionen u, v nicht beide in F überall Null sind, so existiert ein Lösungssystem des inhomogenen Randwertproblems* (1), *wobei u auf R die vorgeschriebenen Randwerte $u_0(s)$ auf R annimmt, sicher immer dann, wenn $u_0(s)$ und $f, \bar{f}$ gewissen linearen Integralbedingungen in endlicher Anzahl genügt.*

In einer Bemerkung zu dieser Satzgruppe ist gezeigt worden, daß der Fall I nicht eintritt[3]). Es verbleibt damit nur II. Dort werden aber keine genauen Aussagen über die Lösbarkeit gemacht, da die „gewissen" Integralbedingungen meines Wissens in der Literatur nirgends angegeben sind und wie Hilbert zuerst bemerkte auch „unter besonderen Umständen" identisch erfüllt sein können. Da nach [3]) die Aussage I leer ist, ein Ergebnis, welches wir für geeignet eingeschränktes F hier wieder gewinnen werden, kann mit obiger Satzgruppe in keinem Falle wirklich entschieden werden, ob ein inhomogenes Randwertproblem lösbar ist oder nicht.

Hier sollen Sätze über die Lösbarkeit des inhomogenen Randwertproblems (1) gewonnen werden, die von diesen genannten Schwierigkeiten frei sind.

Im § 1 werden zu den Randwertproblemen eines speziellen Systems von (1) unendlich viele äquivalente Integralgleichungssysteme angegeben, die sich von den Hilbertschen Systemen dadurch unterscheiden, daß sie eine willkürliche Normierungsfunktion enthalten. Diesen Integralgleichungen kann noch eine sog. „Normforderung" für v auferlegt werden.

Der § 2 bringt dann allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze für das Randwertproblem dieses speziellen Systems bei geeigneter Gebietseinschränkung. Diese Sätze werden aus Randwertproblemen gewonnen, in denen die Lösungen noch gewissen Zusatzbedingungen in Form von „Normforderungen" genügen. Es zeigt sich, daß das inhomogene Randwertproblem immer lösbar ist, das homogene Randwertproblem genau eine Nullösung besitzt.

Durch eine mit dem allgemeinen System (1) verbundene invariante Schreibweise[4]) ist es im § 3 möglich, für das Randwertproblem (1) ebenfalls unendlich viele äquivalente Integralgleichungssysteme anzugeben[5]). Mit diesen ist es möglich, die Sätze des § 2 zu übertragen. Dabei werden

[3]) Hellwig, G., Bemerkungen zu der Satzgruppe von Hilbert über Systeme elliptischer Differentialgleichungen. Math. Z. **55**, 276—283 (1952).

[4]) Haack, W., u. G. Hellwig, Die Überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf Fredholmschen Integralgleichungen. I. Math. Nachr. **4**, 408—418 (1950/51).

[5]) Diese Untersuchungen des § 3 sind eine Fortsetzung von [4]) und sind mit Herrn W. Haack gemeinsam durchgeführt worden.

die zugelassenen Randbedingungen erweitert. Es wird die Randbedingung $\mu_1(s)\, u + \mu_2(s)\, v = u_0(s)$ betrachtet. Diese zeigt, daß die Mannigfaltigkeit und Existenz von Lösungen des Randwertproblems wesentlich von der KRONECKERschen *Charakteristik* des Vektorfeldes $\{\mu_1(s), \mu_2(s)\}$ auf R abhängt. Ist $\{\mu_1, \mu_2\}$ von der Charakteristik Null, so werden diese Randwertprobleme auf solche des § 2 zurückgeführt. Schließlich werden Randwertprobleme von höherer Charakteristik angegeben, die den hier gegebenen Sätzen nicht zugänglich sein können.

Der § 4 bringt dann einen Existenzsatz für das Randwertproblem ohne Gebietseinschränkung. Für diesen ist die in die HILBERTschen Integralgleichungssysteme hineingetragene willkürliche Normierungsfunktion von entscheidender Bedeutung. Er sagt aus, daß das Randwertproblem im großen stets lösbar ist, wenn das homogene Randwertproblem genau eine Nullösung besitzt.

§ 1.

Äquivalente Integralgleichungssysteme.

Wir legen in §§ 1, 2 den Betrachtungen das Randwertproblem

$$\begin{aligned} U_x - V_y &= AU + BV + C \\ U_y + V_x &= \bar{A}U + \bar{B}V + \bar{C} \end{aligned} \tag{2}$$

mit den Randwerten $U = U_0(s)$ auf $\mathfrak{R}$ zugrunde. Dabei sind $A \ldots \bar{C}$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ einmal stetig differenzierbare Funktionen von x, y[5a]), wobei $\mathfrak{F}$ ein Gebiet der x, y-Ebene ist, welches die Voraussetzungen zu (1) erfüllt. Wir suchen Lösungen U, V, die in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ stetig, in $\mathfrak{F}$ stetig differenzierbar sind, das System (2) befriedigen und auf $\mathfrak{R}$ die Randwerte $U_0(s)$ annehmen. Aus der Forderung: U in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ stetig entnimmt man, in welchem Sinne die Randwerte angenommen werden. Weiter betrachten wir (2) mit den Randwerten $U = U_0(s)$ auf $\mathfrak{R}$ und der zusätzlichen Normforderung $\iint_{\mathfrak{F}} V\, k\, dx\, dy = \gamma$. Dabei ist k eine willkürlich vorgegebene in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ stetige, in $\mathfrak{F}$ stetig differenzierbare Funktion von x, y, die in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ wesentlich positiv ist. γ ist eine vorgegebene reelle Zahl. Gesucht werden Lösungen U, V des Randwertproblems (2), wobei V in $\mathfrak{F}$ die Normforderung $\iint_{\mathfrak{F}} V\, k\, dx\, dy = \gamma$ erfüllt. U_0 genügt den Voraussetzungen zu (1). Wir sprechen kurz von einem Randwert-Normproblem.

Für beide Problemstellungen sollen äquivalente Integralgleichungssysteme angegeben werden.

Seien $G^{\mathrm{I}}(x, y; \xi, \eta)$, $G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta)$ die beiden GREENschen Funktionen erster Art bzw. zweiter Art im erweiterten Sinne mit den folgenden Eigenschaften:

[5a]) Es genügt $A \ldots \bar{C}$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ stetig, in $\mathfrak{F}$ stetig differenzierbar vorauszusetzen.

1. G^{I}, G^{II} sind für alle $x, y \subset \mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ und alle $\xi, \eta \subset \mathfrak{F}$ für verschiedene Punkte (x, y), (ξ, η) zweimal stetig differenzierbar bezüglich x, y und genügen den Gleichungen

$$\Delta_L G^{\mathrm{I}} \equiv \frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial y^2} = 0, \qquad \Delta_L G^{\mathrm{II}} = \frac{k(x, y)}{\iint\limits_{\mathfrak{F}} k(x, y)\, dx\, dy}\ ^{6}).$$

Dabei ist k eine beliebige Normierungsfunktion mit den obigen Eigenschaften. Bei gleichzeitiger Annäherung der Punkte (x, y), (ξ, η) gegen einen gemeinsamen Grenzwert wird G^{I}, G^{II} unendlich wie

$$-\frac{1}{4\pi} \log \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}.$$

2. Liegt der Punkt P auf $\mathfrak{R}$, so ist

$$G^{\mathrm{I}}(P; \xi, \eta) = 0, \qquad \frac{\partial G^{\mathrm{II}}(P; \xi, \eta)}{\partial n_p} = 0,$$

unter n die Richtung der inneren Normalen verstanden.

3. G^{I}, G^{II} sind in (x, y), (ξ, η) symmetrisch und es ist

$$\iint\limits_{\mathfrak{F}} G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta)\, k(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{3}$$

Nach Hilbert[1]) und W. A. Hurwitz[7]) gelangt man für das Randwertproblem (2) zu dem folgenden äquivalenten Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) &= \iint\limits_{\mathfrak{F}} \{K_{11}(\xi, \eta; x, y)\, U(x, y) + K_{12}(\xi, \eta; x, y)\, V(x, y)\}\, dx\, dy + \\ &\quad + K_1(\xi, \eta) + L_1(\xi, \eta), \\ V(\xi, \eta) &= \iint\limits_{\mathfrak{F}} \Big\{K_{21}(\xi, \eta; x, y; k)\, U(x, y) + \Big(K_{22}(\xi, \eta; x, y; k) + \\ &\quad + \frac{k(x, y)}{\iint\limits_{\mathfrak{F}} k(x, y)\, dx\, dy}\Big) V(x, y)\Big\}\, dx\, dy + K_2(\xi, \eta; k) + L_2(\xi, \eta; k)\ ^{8}). \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned} K_{11}(\xi, \eta; x, y) &= G^{\mathrm{I}}_x(x, y; \xi, \eta) A(x, y) + G^{\mathrm{I}}_y(x, y; \xi, \eta) \bar{A}(x, y), \\ K_{12} &= G^{\mathrm{I}}_x B + G^{\mathrm{I}}_y \bar{B}, \qquad K_{21}(k) = G^{\mathrm{II}}_x \bar{A} - G^{\mathrm{II}}_y A\ ^{8}), \\ K_{22}(k) &= G^{\mathrm{II}}_x \bar{B} - G^{\mathrm{II}}_y B, \\ K_1 &= \iint\limits_{\mathfrak{F}} (G^{\mathrm{I}}_x C + G^{\mathrm{I}}_y \bar{C})\, dx\, dy, \quad K_2(k) = \iint\limits_{\mathfrak{F}} (G^{\mathrm{II}}_x \bar{C} - G^{\mathrm{II}}_y C)\, dx\, dy, \\ L_1 &= \oint\limits_{\mathfrak{R}} U_0 G^{\mathrm{I}}_n\, ds, \qquad L_2(k) = \oint\limits_{\mathfrak{R}} U_0 G^{\mathrm{II}}_s\, ds. \end{aligned} \tag{5}$$

[6]) Horn, J., Partielle Differentialgleichungen, S. 149. Berlin 1944 oder 1949.

[7]) Hurwitz, W. A., Randwertaufgaben bei Systemen linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Diss. Göttingen 1910.

[8]) Das in die Bezeichnung aufgenommene k soll lediglich erkennen lassen, wie G^{II} normiert ist. Für $k = 1$, $C = \bar{C} = 0$ ist die Äquivalenz unter den gegebenen Voraussetzungen in [7]) bewiesen. Für den vorliegenden allgemeineren Fall folgt die Äquivalenz analog. In §§ 1, 2 darf immer $k = 1$ angenommen werden.

Satz 1. *Unter den zu* (2) *gemachten Voraussetzungen ist das Randwert-Normproblem* (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\Re$ *und der Normforderung* $\iint_{\mathfrak{F}} V k\, dx dy = \gamma$ *äquivalent dem System von Integralgleichungen*

$$
\begin{aligned}
U(\xi,\eta) &= \iint_{\mathfrak{F}} \{K_{11} U + K_{12} V\}\, dx\, dy + K_1 + L_1 \\
V(\xi,\eta) &= \iint_{\mathfrak{F}} \{K_{21}(k) U + K_{22}(k) V\}\, dx\, dy + \\
&\quad + K_2(k) + L_2(k) + \frac{\gamma}{\iint k\, dx\, dy}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Beweis. Führt man in (2) durch $\hat{U} = U$, $\hat{V} = V - \frac{\gamma}{\iint k\, dx\, dy}$ neue gesuchte Funktionen ein, so erhält man das Randwert-Normproblem

$$
\begin{aligned}
\hat{U}_x - \hat{V}_y &= A\,\hat{U} + B\,\hat{V} + D \qquad & D &= C + \frac{B\gamma}{\iint k\, dx\, dy} \\
\hat{U}_y + \hat{V}_x &= \bar{A}\,\hat{U} + \bar{B}\,\hat{V} + \bar{D} \qquad \text{mit} & \bar{D} &= \bar{C} + \frac{\bar{B}\gamma}{\iint k\, dx\, dy}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Es ist $\hat{U} = U_0$ auf $\Re$ und $\iint_{\mathfrak{F}} \hat{V} k\, dx\, dy = 0$.

Dieses Randwert-Normproblem ist äquivalent dem Integralgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\hat{U}(\xi,\eta) &= \iint_{\mathfrak{F}} \{K_{11}\hat{U} + K_{12}\hat{V}\}\, dx\, dy + K_1 + L_1 \\
\hat{V}(\xi,\eta) &= \iint_{\mathfrak{F}} \{K_{21}(k)\,\hat{U} + K_{22}(k)\,\hat{V}\}\, dx\, dy + K_2(k) + L_2(k),
\end{aligned} \tag{7a}
$$

mit $K_{11} \dots K_{22}(k)$; $L_1, L_2(k)$ wie in (5) und

$$
K_1 = \iint_{\mathfrak{F}} \{G^{\mathrm{I}}_x D + G^{\mathrm{I}}_y \bar{D}\}\, dx\, dy, \qquad K_2(k) = \iint_{\mathfrak{F}} \{G^{\mathrm{II}}_x \bar{D} - G^{\mathrm{II}}_y D\}\, dx\, dy.
$$

Stellt man nämlich in dem Integralgleichungssystem (4) [in $\hat{U}, \hat{V}$ geschrieben mit den neu festgelegten K_1, $K_2(k)$] die Forderung $\iint_{\mathfrak{F}} \hat{V} k\, dx\, dy = 0$, so fällt nur das Glied $\frac{k(x,y)}{\iint k(x,y)\, dx\, dy}$ weg. Man erschließt dies leicht aus der Eigenschaft 3. von G^{II}. Umgekehrt: Betrachtet man das Integralgleichungssystem (7a), so hat jede Lösung die Eigenschaft, daß $\iint_{\mathfrak{F}} \hat{V} k\, dx\, dy = 0$ ist. Man erhält aus (7a)

$$
\begin{aligned}
&\iint \hat{V}(\xi,\eta)\, k(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \\
&\quad = \iint k(\xi,\eta) \left(\iint G^{\mathrm{II}}_x(x,y;\xi,\eta)\, \bar{A}(x,y)\, \hat{U}(x,y)\, dx\, dy\right) d\xi\, d\eta + \cdots \\
&\quad = \iint \bar{A}(x,y)\, \hat{U}(x,y) \left(\iint G^{\mathrm{II}}_x(x,y;\xi,\eta)\, k(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\right) dx\, dy + \cdots.
\end{aligned}
$$

Aus der Eigenschaft 3 von G^{II} folgt $\iint G^{\mathrm{II}}_x(x,y;\xi,\eta)\, k(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = 0$. Die dabei vorzunehmenden Integrationsvertauschungen und Differentiationen unter dem Integral sind legitim. Geht man in (7a) auf die U, V zurück, so ergibt sich nach leichter Zwischenrechnung die Behauptung (6).

§ 2.

Existenz- und Eindeutigkeitssätze für das Randwertproblem.

Hilfssatz 1. *Für die ersten Ableitungen $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ (kurz mit D_1 bezeichnet) der* Greenschen *Funktion G^{I} und G^{II} mit der Normierung $k-1$ gelten für alle Punkte (x, y) und (ξ, η) aus $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ die Abschätzungen*

$$|D_1 G^{\mathrm{I}}(x, y; \xi, \eta)| < A_1 \frac{1}{\varrho}, \qquad |D_1 G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta)| < A_2 \frac{1}{\varrho}.$$

Dabei sind A_ν von $x, y; \xi, \eta$ unabhängige positive Konstante und $\varrho = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

Beweis. Für G^{I} ist diese Behauptung bekannt[9]). Durch G^{III} werde eine Greensche Funktion mit der üblichen Singularitätsforderung 1 und den Eigenschaften

$$\Delta_L G^{\mathrm{III}} = 0, \qquad \frac{\partial G^{\mathrm{III}}(P; \xi, \eta)}{\partial n_p} = \frac{1}{l}$$

mit P auf $\mathfrak{R}$ eingeführt. l ist die Länge der Randkurve $\mathfrak{R}$. Es gilt: $D_1 G^{\mathrm{III}}(x, y; \xi, \eta) < A_3 \frac{1}{\varrho}$ [10]). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit genügt es, die Abschätzung für G^{II} für Kreise $x^2+y^2=r^2$ zu beweisen. Für diese gilt:

$$G^{\mathrm{II}}(x, y; \xi, \eta) = G^{\mathrm{III}}(x, y; \xi, \eta) + \frac{1}{4\pi r^2}(x^2+y^2+\xi^2+\eta^2) + \text{const},$$

wie man leicht verifiziert. Nun ist $x \leqq r$, $y \leqq r$, $\varrho \leqq 2r$ und damit $|D_1 G^{\mathrm{II}}| < A_2 \frac{1}{\varrho}$ mit $A_2 = A_3 + \frac{1}{\pi}$.

Jetzt sind wir in der Lage, die Lösbarkeit des Randwertproblems (2) bei geeignet eingeschränktem Gebiet in jedem Falle zu beweisen. In der Formulierung von Hilbert[1]) heißt dies, daß die gewissen Integralbedingungen für jede Wahl von U_0, C, $\bar{C}$ identisch erfüllt sind.

Satz 2. *Es sei γ eine beliebige reelle Zahl. Das Randwertproblem* (2) *mit $U = U_0$ auf $\mathfrak{R}$ und der Normforderung $\iint V k\, dx\, dy = \gamma$ hat genau ein Lösungssystem U, V. U_0, k, γ sind beliebig vorgegebene Größen. $A, B \ldots \bar{C}$, U_0 und k genügen den Voraussetzungen zu* (2).

Beweis. Sei $k=1$, was ohne Einschränkung angenommen werden darf. Das vorliegende Randwertproblem mit Normforderung ist nach Satz 1 mit dem Integralgleichungssystem (6) äquivalent. Die Kerne $K_{11} \ldots K_{22}$ haben bei gleichzeitiger Annäherung der Punkte (x, y) und (ξ, η) gegen einen gemeinsamen Grenzwert eine Singularität erster Ordnung. Es sei $\mathfrak{F}'$ ein zu $\mathfrak{F}$ kongruentes, geeignet liegendes Gebiet. Wir bezeichnen mit (ξ', η') den Punkt in $\mathfrak{F}'$, der dem Punkt (ξ, η) in $\mathfrak{F}$ entspricht. Man kann (6) in bekannter Weise auf eine Integralgleichung

[9]) Lichtenstein, L., Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Enzykl. math. Wiss. II 3/1, 248.

[10]) Vgl. [9]), S. 250—251.

umschreiben, indem man definiert:

$$z(\xi,\eta)=\begin{cases}U(\xi,\eta), & \text{für } (\xi,\eta) \text{ in } \mathfrak{F},\\ V(\xi',\eta'), & \text{für } (\xi,\eta) \text{ in } \mathfrak{F}';\end{cases}$$

$$\mathfrak{K}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)=\begin{cases}K_{11}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) & \text{für } (\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2) \text{ in } \mathfrak{F}\\ \text{und analog für } K_{12},\ K_{21},\ K_{22}.\end{cases}$$

Und nun verfährt man für die Absolutglieder in (6) analog. Man erhält dann eine Integralgleichung der Form

$$z(\xi,\eta)=\iint\limits_{\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'}\mathfrak{K}(\xi,\eta;x,y)\,z(x,y)\,dx\,dy+\mathfrak{L}(\xi,\eta). \tag{8}$$

Nach einmaliger Iteration ist der iterierte Kern

$$\mathfrak{K}_2(\xi,\eta;x,y)=\iint\limits_{\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'}\mathfrak{K}(\xi,\eta;s,t)\,\mathfrak{K}(s,t;x,y)\,ds\,dt$$

quadratisch integrabel. Nach Hilfssatz 1 kann $\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'$ so eingeengt werden, daß

$$\iint\limits_{\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'}\iint\limits_{\mathfrak{F}+\mathfrak{F}'}(\mathfrak{K}_2(\xi,\eta;x,y))^2\,d\xi\,d\eta\,dx\,dy\leq p<1 \tag{9}$$

wird. Wegen (9) hat die homogene iterierte Gleichung (8) nur die Lösung $z=0$ und in bekannter Weise (8) genau eine Lösung z. Wegen der Äquivalenz ist dieses z bzw. das Lösungspaar u, v eine Lösung des Differentialgleichungssystems und erfüllt Norm- und Randwertbedingung.

Wir ziehen aus Satz 2 einige Folgerungen.

Satz 3. *Das homogene Randwert-Normproblem* (2)

$$U_x-V_y=AU+BV,\qquad U_y+V_x=\bar{A}U+\bar{B}V \tag{10}$$

mit $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und* $\iint V\,k\,dx\,dy=0$ *hat nur das Lösungssystem* $U=0$, $V=0$.

Beweis. Dies ist eine Lösung und nach Satz 2 die einzige.

Satz 4. *a) Es gibt kein Randwertproblem der Form* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$, *welches als einziges Lösungssystem nur* $U=0$, $V=0$ *besitzt.*

b) Vielmehr hat jedes solches Randwertproblem mindestens ein Lösungssystem U_H, V_H *mit* $U_H=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und* U_H, V_H *nicht beide Null in* $\mathfrak{F}$ *und damit sicher die unendlich vielen Lösungen* $U=\varkappa U_H$, $V=\varkappa V_H$ ($\varkappa$ *eine Konstante*).

Beweis. Zu a) Stellt man zu dem Randwertproblem noch die Normforderung $\iint V\,k\,dx\,dy=\gamma$ mit $\gamma\neq 0$, so erhält man sicher ein Lösungssystem mit $V\not\equiv 0$.

Zu b). Aus a) folgt, daß stets ein solches U_H, V_H vorhanden ist.

Bemerkung. Satz 4 zeigt, daß die Aussage I (S. 388) leer ist. Ohne Gebietseinschränkung vgl. [3]).

Es soll jetzt die Gesamtheit der Lösungen des Randwertproblems (2) aus Randwert-Normproblemen aufgebaut werden.

Satz 5. *a) Das Randwertproblem* (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *hat stets unendlich viele Lösungen.*

b) Man erhält die Gesamtheit, indem man die unendlich vielen Randwert-Normprobleme (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und* $\iint V\, k\, dx\, dy = \gamma_0$ *löst. Dabei durchläuft* γ_0 *die Gesamtheit der reellen Zahlen.*

Beweis. Zu a). Irgendeine Lösung U_I, V_I findet man nach Satz 2. Die in Satz 4 angegebenen Lösungen $\varkappa U_H, \varkappa V_H$ können hinzuaddiert werden.

Zu b). Der Prozeß liefert für jedes γ_0 eine Lösung des Randwertproblems. Angenommen es gebe eine Lösung von (2) U_1, V_1 mit $U_1 = U_0$ auf $\mathfrak{R}$, die durch diesen Prozeß nicht gefunden werden kann. $\iint V_1\, k\, dx\, dy$ habe den Wert γ_1. Das Randwert-Normproblem mit $\iint V\, k\, dx\, dy = \gamma_1$ habe die Lösung U_0, V_0. Die Differenzen $U_1 - U_0 = W$, $V_1 - V_0 = Z$ genügen den Voraussetzungen des Satzes 3 und damit folgt $W = 0$, $Z = 0$ in $\mathfrak{F}$, welches ein Widerspruch zur Annahme ist. Daher ist U_1, V_1 bei dem Prozeß schon mit erfaßt und Satz 5 ist bewiesen.

Satz 6. *Ist* U_I, V_I *irgendeine Lösung von* (2) *mit* $U_I = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$; U_H, V_H *eine Lösung von* (10) *mit* $U_H = 0$ *auf* $\mathfrak{R}$, *wobei* U_H, V_H *nicht beide in* $\mathfrak{F}$ *Null sind, so stellt* $U = \varkappa U_H + U_I$, $V = \varkappa V_H + V_I$ *die Gesamtheit der Lösungen des Randwertproblems* (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *dar* ($\varkappa$ *eine Konstante*).

Beweis. Nach Satz 2 ist ein solches U_I, V_I immer vorhanden. Wählt man $\varkappa$ in der Form

$$\varkappa = \frac{\gamma_0 - \iint V_I\, k\, dx\, dy}{\iint V_H\, k\, dx\, dy},$$

so wird durch $U = \varkappa U_H + U_I$, $V = \varkappa V_H + V_I$ jedes Randwert-Normproblem aus Satz 5b gelöst. Es ist $\iint V_H\, k\, dx\, dy \neq 0$, da aus $\iint V_H\, k\, dx\, dy = 0$ wegen $U_H = 0$ auf $\mathfrak{R}$ nach Satz 3 folgt $U_H = 0$, $V_H = 0$, welches ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes ist. Damit ist alles bewiesen.

Satz 6 gibt eine vollständige Lösung des Randwertproblems. Nach Satz 2 kann man eine Lösung des Randwertproblems durch eine Normforderung eindeutig festlegen. Es kann dies auch in Anlehnung an Riemann durch eine „Punktforderung" geschehen[11]).

Satz 7. *Es seien* γ, γ_1, γ_2 *irgendwelche vorgegebenen reellen Zahlen mit* $(\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2 \neq 0$. *Hat das homogene Randwertproblem* (10) *mit* $U = 0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *eine Lösung* U_H, V_H *derart, daß im beliebigen Punkt* $(\xi, \eta) \subset \mathfrak{F} + \mathfrak{R}$

$$\gamma_1 U_H(\xi, \eta) + \gamma_2 V_H(\xi, \eta) \neq 0 \tag{11}$$

[11]) In Nr. 19 seiner Dissertation zeigt Riemann, daß man eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen dadurch eindeutig in einem Gebiet $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ festlegen kann, daß man auf dem Rand $\mathfrak{R}$ den Realteil und in einem beliebigen Punkt $(\xi, \eta) \subset \mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ den Imaginärteil willkürlich vorschreibt. Bezeichnet man Real- und Imaginärteil mit U, V, so entspricht die obige Fragestellung dem Randwertproblem mit Punktvorgabe: $U_x - V_y = 0$, $U_y + V_x = 0$. Dabei ist U auf $\mathfrak{R}$ und V im Punkte (ξ, η) willkürlich vorgeschrieben.

ist, so hat das Randwertproblem (2) *mit* $U = U_0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und der Vorgabe in einem Punkte* $\gamma_1 U(\xi, \eta) + \gamma_2 V(\xi, \eta) = \gamma$ *genau eine Lösung.*

Beweis. Die Konstante $\varkappa$ in Satz 6 wird durch die Punktvorgabe eindeutig festgelegt. Es ist

$$\varkappa = \frac{\gamma - (\gamma_1 U_I(\xi, \eta) + \gamma_2 V_I(\xi, \eta))}{\gamma_1 U_H(\xi, \eta) + \gamma_2 V_H(\xi, \eta)}.$$

Bemerkungen. Die Voraussetzung (11) ist wesentlich. Es kann nämlich notwendig $U_H = 0$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ eintreten, so daß die Wahl $\gamma_2 = 0$ dann nicht zulässig ist. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft. In Analogie zu den Verhältnissen bei dem CAUCHY-RIEMANNschen System[11]) könnte man geneigt sein anzunehmen, daß die Wahl $\gamma_1 = 0$ immer zulässig ist. Bei den in Satz 8 zugelassenen Systemen ist dies tatsächlich immer der Fall, daß sie jedoch allgemein nicht notwendig möglich ist, wird durch ein Beispiel gezeigt.

Satz 8. *Die Bedingung* $B_x + \bar{B}_y = 0$ *in* $\mathfrak{F}$ *ist notwendig und hinreichend dafür, daß bei dem Randwertproblem* (10) *mit* $U = 0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *die Lösungsgesamtheit aus* $U = 0$, V *besteht. Die Gesamtheit kann explizit angegeben werden.*

Beweis. a) Setzt man in (10) $U = 0$, so erhält man für V: $-V_y = BV$, $V_x = \bar{B}V$ und dieses System hat nur dann von $V = 0$ verschiedene Lösungen, wenn die „Integrabilitätsbedingung" $B_x + \bar{B}_y = 0$ in $\mathfrak{F}$ erfüllt ist. Solche muß es aber nach Satz 4a) haben, da anderenfalls die Annahme $U = 0$ nicht statthaft ist.

b) Ist $B_x + \bar{B}_y = 0$, so erhält man aus (10) durch Differentiation der ersten Gleichung nach x und der zweiten nach y und anschließender Addition, wobei man die Gleichungen (10) nochmals berücksichtigt eine Gleichung der Form

$$(12)\quad U_{xx} + U_{yy} - (A + \bar{B})U_x + (B - \bar{A})U_y + (\bar{B}A - B\bar{A} - A_x - \bar{A}_y)U = 0.$$

Mit $U = 0$ auf $\mathfrak{R}$ folgt aus (12) für geeignet eingeschränktes $\mathfrak{F}$ notwendig $U = 0$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$[12]). Für die explizite Darstellung der Lösung vgl. [3]).

Wir kommen zurück auf das angekündigte Beispiel.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ das durch den Einheitskreis abgeschlossene Gebiet $x^2 + y^2 \leq 1$. Wir betrachten das System

$$U_x - V_y = -6y\,U - 6x\,V, \qquad U_y + V_x = 6x\,U - 6y\,V$$

mit $U = 0$ auf $\mathfrak{R}$. Lösungen sind $U = -\varkappa \sin 3(x^2 + y^2 - 1)$, $V = \varkappa \cos 3(x^2 + y^2 - 1)$. Es ist $V = 0$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = r_0^2$ mit $r_0 = \sqrt{1 - \frac{\pi}{6}} < 1$. Daher ist für alle Punkte (x, y), die auf diesem Kreis liegen, die Wahl $\gamma_1 = 0$ in (11) nicht zulässig.

[12]) LICHTENSTEIN, L., Neuere Entwicklung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Enzykl. math. Wiss. II 3/2, 1297.

§ 3.

Das allgemeine Randwert- und Randwert-Normproblem.

Um alle Sätze und Probleme auf das allgemeine System (1) zu übertragen, werden wir (1) auf ein System der Form (2) zu reduzieren suchen. Es genügt aber für die verschiedenen Problemstellungen nicht, nur die bekannte existenzmäßige Möglichkeit einer solchen Übertragung aufzuzeigen, sondern es werden genaue Zusammenhänge zwischen (1) und (2) benötigt. Insbesondere werden wir für das allgemeine System (1) äquivalente Integralgleichungssysteme angeben, die an Stelle von (4) und (6) treten und eine Verallgemeinerung von diesen sind[5]).

Wir betrachten (1) unter den dort gegebenen Voraussetzungen. Man nennt (1) in dem abgeschlossenen Gebiet $F+R$ *elliptisch*, wenn dort die quadratische Form

$$(13)\qquad Q = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} dx^1 dx^1 - \left\{ \begin{vmatrix} a^1 & b^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & b^1 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} \right\} dx^1 dx^2 + \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} dx^2 dx^2$$

mit der Diskriminante

$$(14)\qquad D \equiv \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} - \frac{1}{4} \left\{ \begin{vmatrix} a^1 & b^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & b^1 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} \right\}^2$$

definit ist. Es ist daher $D > 0$ in $F+R$. Führt man die Ausdrücke

$$(15)\qquad q = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{a}^2 \end{vmatrix}, \quad p = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \begin{vmatrix} a^1 & b^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & b^1 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} \right\}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ \bar{b}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix}$$

ein, so gilt wie man leicht verifiziert: $1 = r\,q - p^2$. Daher ist $q \neq 0$, $r \neq 0$ in $F+R$. Wir dürfen Q stets positiv definit annehmen und Q/D als quadratische Grundform (Metrik) einer Riemannschen Geometrie in der x^1, x^2-Ebene deuten. Mit

$$(16)\qquad g_{11} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^2 \end{vmatrix}, \qquad g_{12} = g_{21} = -\frac{1}{2D} \left\{ \begin{vmatrix} a^1 & b^2 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & b^1 \\ \bar{a}^2 & \bar{b}^1 \end{vmatrix} \right\},$$
$$g_{22} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ \bar{a}^1 & \bar{b}^1 \end{vmatrix}$$

erhalten wir das Bogenelement $(ds)^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$[13]). Wir führen nun zwei bezüglich der Metrik orthogonale Felder von Einheitsvektoren $\dot{x}^i = \alpha^i(x^1, x^2)$, $\dot{x}^i = \bar{\alpha}^i(x^1, x^2)$ ein, die wir durch

$$(17)\qquad g_{ik}\,\alpha^i\,\alpha^k = 1, \qquad g_{ik}\,\alpha^i\,\bar{\alpha}^k = 0, \qquad g_{ik}\,\bar{\alpha}^i\,\bar{\alpha}^k = 1$$

festlegen. Diese und die mit ω_1, ω_2 bezeichneten Differentialformen

$$(18)\qquad \omega_1 = \alpha_i\,dx^i, \qquad \omega_2 = \bar{\alpha}_i\,dx^i \quad \text{mit} \quad \alpha_i = g_{ik}\,\alpha^k, \qquad \bar{\alpha}_i = g_{ik}\,\bar{\alpha}^k$$

sind wegen der durch (16) mit dem Ausgangssystem erzeugten Kopplung für (1) von ausgezeichneter Bedeutung. Es gelten dann mit

$$g_{ik}\,g^{kl} = \delta_i^l = \begin{cases} 1 \text{ für } i = l \\ 0 \text{ für } i \neq l \end{cases}$$

[13]) Über oben und unten stehende gleiche Indizes ist in diesem Paragraphen stets von 1 bis 2 zu summieren.

die Relationen

$$(19)\quad g^{ik}\alpha_i\alpha_k = 1\,,\qquad g^{ik}\alpha_i\bar{\alpha}_k = 0\,,\qquad g^{ik}\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_k = 1\,,\qquad \left|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2\end{matrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{D}}\,.$$

Ist S eine in F stetig differenzierbare Funktion von x^1, x^2, so nennt man $S_\alpha = \alpha^i S_i$, $S_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}^i S_i \left(S_i \equiv \frac{\partial S}{\partial x^i}\right)$ mit der Umkehrung $S_i = \alpha_i S_\alpha + \bar{\alpha}_i S_{\bar{\alpha}}$ die invarianten Ableitungen bezüglich der Formen ω_1, ω_2. Indem man (1) linear kombiniert[14])

$$(20)\qquad (\bar{b}^k\alpha_k)\,\mathfrak{Q}^1 - (b^k\bar{\alpha}_k)\,\mathfrak{Q}^2,\qquad (\bar{b}^k\alpha_k)\,\mathfrak{Q}^1 - (b^k\alpha_k)\,\mathfrak{Q}^2$$

erhält man mit den *Normalfunktionen*

$$(21)\qquad U = u,\qquad V = p\,u + r\,v$$

[vgl. (15)] die *Normalform* zu (1)

$$(22)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{N}^1 &\equiv U_\alpha - V_{\bar{\alpha}} - a\,U - b\,V - c = 0\,.\\ \mathfrak{N}^2 &\equiv U_{\bar{\alpha}} + V_\alpha - \bar{a}\,U - \bar{b}\,V - \bar{c} = 0\,.\end{aligned}$$

Nach (21) und (15) sind die U, V unabhängig von dem willkürlichen Vektorfeld α^i, $\bar{\alpha}^k$ und bestimmen in ein-eindeutiger Weise die u, v. Die Koeffizienten $a \ldots \bar{c}$ sind durch elementare algebraische Rechnungen aus den Koeffizienten von (1) und α^i bestimmt. Sie sind bei geeigneter Voraussetzung über das willkürliche Vektorfeld α^i unter den Voraussetzungen zu (1) in $F + R$ stetig differenzierbar. Nehmen wir die Lösungen u, v von (1) als Invariante gegen Transformationen der x^i an, so ergeben sich die Normalfunktionen U, V in (22) als Invariante 1. gegen Koordinatentransformationen, 2. gegen Transformationen des isometrischen Vektorfeldes α^i, $\bar{\alpha}^k$ (von diesem hängen sie ja gar nicht ab), 3. gegen konforme Transformationen[15]).

Mit (18) läßt sich $(ds)^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ in der Form $(ds)^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$ schreiben. Seien nun die zu (1) gemachten Voraussetzungen für die Koeffizienten in einem Gebiet F^* mit der stetig gekrümmten, geschlossenen Randkurve R^* erfüllt derart, daß F^* das Gebiet F ganz im Innern enthält $(F^* \supset F)$, so existieren in dem geeignet eingeschränkten F^* Koordinatentransformationen $x = \varphi(x^1, x^2)$, $y = \psi(x^1, x^2)$ derart, daß $(ds)^2$ die Form annimmt

$$(23)\qquad (ds)^2 \equiv (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = \sigma^2\left((dx)^2 + (dy)^2\right)\,^{16}).$$

Dabei haben φ, ψ in $F + R$ stetige erste und einer HÖLDER-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung. Sind Δ_1, Δ_B der erste und

[14]) Man vergleiche für die Durchführung [4]). Die hier gegebene Normierung weicht von der dortigen nur unwesentlich ab.

[15]) Unter konformen Transformationen verstehen wir solche, die (1) in $\lambda\,\mathfrak{Q}^1 = 0$, $\mu\,\mathfrak{Q}^2 = 0$ überführen mit $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ in $F + R$.

[16]) Siehe [12]), S. 1297—98 und die dort angegebene Literatur.

zweite BELTRAMIsche[17]) und Δ_L der LAPLACEsche Operator, so gilt $\Delta_B \varphi = 0$, $\Delta_B \psi = 0$, $\Delta_B = \frac{1}{\sigma^2} \Delta_L$ und $\sigma^2 = \frac{1}{\Delta_1 \varphi} = \frac{1}{\Delta_1 \psi}$[18]). $F + R$ werde bei dieser Transformation umkehrbar eindeutig auf das Gebiet $\mathfrak{S} + \mathfrak{R}$ mit stetig gekrümmtem Rand $\mathfrak{R}$ abgebildet. Insbesondere ist σ^2 in $\mathfrak{S} + \mathfrak{R}$ wesentlich positiv und stetig differenzierbar, kann daher als Normierungsfunktion k [vgl. zu (2)] dienen. Aus (23) folgt $\omega_1 = \sigma \cos \varphi \, dx + \sigma \sin \varphi \, dy$, $\omega_2 = -\sigma \sin \varphi \, dx + \sigma \cos \varphi \, dy$ und da, wie man leicht zeigt, die Normalform (22) bei den konformen und orthogonalen Transformationen der Ableitungsrichtungen invariant bleibt, darf $\varphi = 0$ gesetzt werden[19]). Dies führt zu $\omega_1 = \sigma \, dx$, $\omega_2 = \sigma \, dy$. Daher ist in (22) $U_\alpha = \frac{1}{\sigma} U_x$, $U_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{\sigma} U_y$ und (22) geht mit $a = \frac{1}{\sigma} A \ldots \bar{c} = \frac{1}{\sigma} \bar{C}$ in das spezielle System (2) über und $A \ldots \bar{C}$ erfüllen die Voraussetzungen zu (2).

Wir führen analog zu § 1 allgemeine GREENsche Funktionen $g^{\mathrm{I}}(x^1, x^2; \xi^1, \xi^2)$, $g^{\mathrm{II}}(x^1, x^2; \xi^1, \xi^2)$ ein mit den Eigenschaften:

1. $\quad \Delta_B g^{\mathrm{I}} = 0, \quad \Delta_B g^{\mathrm{II}} = \frac{k}{\iint k [\omega_1 \omega_2]}$[20]).

Dabei ist k für das Gebiet F in der x^1, x^2-Ebene eine Normierungsfunktion mit analogen Eigenschaften wie zu (2). Für $x^i \to \xi^i$ wird g^{I}, g^{II} wie $-\frac{1}{4\pi} g_{ik}(\xi^1, \xi^2)(x^i - \xi^i)(x^k - \xi^k)$ unendlich.

2. Mit Punkt P: (x^1, x^2) auf R ist $g^{\mathrm{I}}(P; \xi^1, \xi^2) = 0$, $\frac{\partial g^{\mathrm{II}}(P; \xi^1, \xi^2)}{\partial n_p} = 0$.

3. $g^{\mathrm{I}}, g^{\mathrm{II}}$ ist symmetrisch in (x^1, x^2), (ξ^1, ξ^2) und es ist

$$\iint_F g^{\mathrm{II}}(x^i, \xi^i) \, k \, [\omega_1 \omega_2] = 0 .$$

[17]) Ist Φ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, so ist

$$\Delta_1 \Phi = \frac{g_{11} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \right)^2 - 2 g_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} + g_{22} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \right)^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} .$$

In den mit (1) verbundenen invarianten Ableitungen läßt $\Delta_B \Phi$ die einfache Darstellung zu

$$\Delta_B \Phi = \Phi_{\alpha\alpha} + \Phi_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} - \bar{q} \Phi_\alpha - q \Phi_{\bar{\alpha}}$$

mit $[d\omega_1] = q [\omega_1 \omega_2]$, $[d\omega_2] = \bar{q} [\omega_2 \omega_1]$ [vgl. [4]) S. 415].

[18]) BIANCHI, L., Vorlesungen über Differentialgeometrie, S. 67—69. Leipzig 1910.

[19]) In (23) setzen wir allgemeiner $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = \sigma^2 \{(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2\}$. Werden durch $\widetilde{\Omega}_1 = \sigma \Omega_1$, $\widetilde{\Omega}_2 = \sigma \Omega_2$ neue Formen eingeführt, so transformieren sich die Ableitungsrichtungen in (22), da Formen und invariante Ableitungen kontragredient miteinander verknüpft sind: $\frac{1}{\sigma} U_\alpha = U_{\tilde{\alpha}}$, $\frac{1}{\sigma} U_{\bar{\alpha}} = U_{\bar{\tilde{\alpha}}}$. Bildet man in (22) $\frac{1}{\sigma} \mathfrak{R}^1$, $\frac{1}{\sigma} \mathfrak{R}^2$, so ändert sich die Gestalt von (22) nicht. Nun ist $\omega_1 = \widetilde{\Omega}_1 \cos \varphi + \widetilde{\Omega}_2 \sin \varphi$, $\omega_2 = -\widetilde{\Omega}_1 \sin \varphi + \widetilde{\Omega}_2 \cos \varphi$. Bilden wir in (22) $\mathfrak{R}^1 \cos \varphi + \mathfrak{R}^2 \sin \varphi$, $-\mathfrak{R}^1 \sin \varphi + \mathfrak{R}^2 \cos \varphi$, so erhalten wir mit den neuen Ableitungsrichtungen $U_\beta = U_{\tilde{\alpha}} \cos \varphi + U_{\bar{\tilde{\alpha}}} \sin \varphi$, $U_{\bar{\beta}} = -U_{\tilde{\alpha}} \sin \varphi + U_{\bar{\tilde{\alpha}}} \cos \varphi$ wieder eine Normalform.

[20]) $[\omega_1 \omega_2] = (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \bar{\alpha}_1) \, [dx^1 \, dx^2] = \frac{1}{D} [dx^1 \, dx^2]$ [vgl. [19])] ist das „äußere Produkt" der Formen ω_1, ω_2.

Dabei bedeutet n die zur Tangentenrichtung von R bezüglich der Metrik orthogonale Richtung, die ins Innere von F zeigt. Also:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}\,ds = \Phi_\alpha\,\omega_1 + \Phi_{\bar\alpha}\,\omega_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n}\,ds = \Phi_{\bar\alpha}\,\omega_1 - \Phi_\alpha\,\omega_2.$$

Die Existenz solcher GREENschen Funktionen ist sicher, denn g^{I} geht bei den Koordinatentransformationen (23) in G^{I} von § 1 und g^{II} in ein G^{II} über, welches mit $\left(\text{wegen } \Delta_B = \frac{1}{\sigma^2}\,\Delta_L\right)$ $k_1(x, y) = k\,(\varphi^{-1}(x, y), \psi^{-1}(x, y))\cdot \sigma^2(x, y)$ normiert ist[21]).

Nunmehr legen wir unseren Betrachtungen das System (1) bzw. (22) zugrunde und gelangen in bekannter Weise[4]) zu dem folgenden System von Integralgleichungen, die dem Randwertproblem (1) mit $u = u_0$ auf R äquivalent sind,

$$U(\xi^i) = \iint_F \{k_{11}(\xi^i, x^i)\,U(x^i) + k_{12}(\xi^i, x^i)\,V(x^i)\}\,[\omega_1\,\omega_2] + k_1(\xi^i) + l_1(\xi^i),$$

$$V(\xi^i) = \iint_F \left\{k_{21}(\xi^i, x; k)\,U(x^i) + \left(k_{22}(\xi^i, x^i; k) + \frac{k(x^i)}{\iint k\,[\omega_1\,\omega_2]}\right) V(x^i)\right\} \times \tag{24}$$

$$\times\,[\omega_1\,\omega_2] + k_2(\xi^i; k) + l_2(\xi^i; k).$$

Nach (21) kann man diese durch $u = U$, $v = \frac{V - pU}{r}$ unmittelbar in u, v umschreiben. In (24) sind die Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= g^{\mathrm{I}}_\alpha\,a + g^{\mathrm{I}}_{\bar\alpha}\,\bar a, & k_{12} &= g^{\mathrm{I}}_\alpha\,b + g^{\mathrm{I}}_{\bar\alpha}\,\bar b,\\
k_{21} &= g^{\mathrm{II}}_\alpha\,\bar a - g^{\mathrm{II}}_{\bar\alpha}\,a, & k_{22} &= g^{\mathrm{II}}_\alpha\,\bar b - g^{\mathrm{II}}_{\bar\alpha}\,b,\\
k_1 &= \iint_F (g^{\mathrm{I}}_\alpha\,c + g^{\mathrm{I}}_{\bar\alpha}\,\bar c)\,[\omega_1\,\omega_2], & k_2 &= \iint_F (g^{\mathrm{II}}_\alpha\,\bar c - g^{\mathrm{II}}_{\bar\alpha}\,c)\,[\omega_1\,\omega_2],\\
l_1 &= \oint_R u_0\,g^{\mathrm{I}}_n\,ds, & l_2 &= \oint_R u_0\,g^{\mathrm{II}}_s\,ds.
\end{aligned} \tag{25}$$

Diese Integralgleichungen enthalten σ^2 nicht mehr. Sie zeigen, wie vorteilhaft die Verwendung der mit (1) direkt verknüpften invarianten Ableitungen und Formen ω_1, ω_2 ist.

Nunmehr sind wir in der Lage, alle Sätze aus §§ 1, 2 auch für das allgemeinere System (1) auszusprechen. Jedoch sollen die Randvorgaben noch erweitert werden. Die Normalform (22) bleibt bei den „orthogonalen" Transformationen der U, V

$$\begin{aligned}
\hat U &= a_{11}\,U - a_{12}\,V, & U &= \frac{a_{11}}{E}\,\hat U + \frac{a_{12}}{E}\,\hat V\\
\hat V &= a_{12}\,U + a_{11}\,V, & V &= -\frac{a_{12}}{E}\,\hat U + \frac{a_{11}}{E}\,\hat V
\end{aligned} \tag{26}$$

[21]) Dabei ist die Umkehrung von $x = \varphi(x^1, x^2)$, $y = \psi(x^1, x^2)$ [vgl. zu (23)] mit $x^1 = \varphi^{-1}(x, y)$, $x^2 = \psi^{-1}(x, y)$ bezeichnet. Dies ist wegen $\varphi_x\,\psi_y - \varphi_y\,\psi_x \neq 0$ möglich.

mit $E=(a_{11})^2+(a_{12})^2>0$ in $F+R$ erhalten [1) S. 413]. Man erhält aus der ersten Gleichung von (22)

$$\begin{aligned}(27)\qquad &\frac{a_{11}}{E}\hat{U}_\alpha+\frac{a_{12}}{E}\hat{V}_\alpha+\frac{a_{12}}{E}\hat{U}_{\bar{\alpha}}-\frac{a_{11}}{E}\hat{V}_{\bar{\alpha}}\\ &=\left\{\frac{1}{E}(a_{11}a-a_{12}b)-\left(\frac{a_{11}}{E}\right)_\alpha-\left(\frac{a_{12}}{E}\right)_{\bar{\alpha}}\right\}\hat{U}+\cdots.\end{aligned}$$

Indem man in (22) $\mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{N}^2$ linear kombiniert: $a_{11}\mathfrak{N}^1-a_{12}\mathfrak{N}^2$, $a_{12}\mathfrak{N}^1+a_{11}\mathfrak{N}^2$, erhält man für $\hat{U}$, $\hat{V}$ eine Normalform

$$(28)\qquad \hat{U}_\alpha-\hat{V}_{\bar{\alpha}}-\hat{a}\hat{U}-\hat{b}\hat{V}-\hat{c}=0,\qquad \hat{U}_{\bar{\alpha}}+\hat{V}_\alpha-\hat{\bar{a}}\hat{U}-\hat{\bar{b}}\hat{V}-\hat{\bar{c}}=0.$$

Definition. *Wir nennen φ_1, φ_2 Feldfunktionen, wenn φ_1, φ_2 in $F-R$ stetig differenzierbar, in F zweimal stetig differenzierbar sind, in $F+R$ keine gemeinsame Nullstelle haben: $(\varphi_1)^2+(\varphi_2)^2>0$ und auf R willkürlich vorgegebene Randwerte $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ annehmen.*

Die Koeffizienten in (28) $\hat{a}\ldots\hat{\bar{c}}$ sind in $F+R$ stetig, in F stetig differenzierbar, wenn die Koeffizienten in (1) die dortigen Voraussetzungen erfüllen und a_{11}, a_{12} Feldfunktionen sind. Diese Voraussetzungen sind etwas geringer als in § 1, reichen aber für die Überführung auf äquivalente Integralgleichungssysteme noch aus[5a), 7)].

Wir betrachten zu (1) das allgemeine Randwertproblem, wo $\mu_1(s)u+\mu_2(s)v=u_0(s)$ auf R vorgeschrieben wird. Dabei sind μ_1, μ_2, u_0 willkürlich vorgeschriebene zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit $(\mu_1(s))^2+(\mu_2(s))^2>0$ auf R.

Wir nehmen für das folgende immer an, daß zu μ_1, μ_2 Feldfunktionen φ_1, φ_2 existieren. Setzen wir mit (15) $a_{11}=\varphi_1-\frac{\varphi_2}{r}p$, $a_{12}=-\frac{\varphi_2}{r}$, so folgt mit (21), (26) unter Beachtung von $1=rq-p^2$

$$\begin{aligned}(29)\qquad \hat{U}&=\left(\varphi_1-\frac{\varphi_2}{r}p\right)U+\frac{\varphi_2}{r}V=\varphi_1u+\varphi_2v\\ \hat{V}&=(\varphi_1p-\varphi_2q)u+(\varphi_1r-\varphi_2p)v.\end{aligned}$$

Sind φ_1, φ_2 Feldfunktionen, so sind auch a_{11}, a_{12} solche mit den Randwerten $\mu_1-\frac{\mu_2}{r}p$, $-\frac{\mu_2}{r}$, denn es ist

$$(a_{11})^2+(a_{12})^2=\frac{1}{r}((\varphi_1)^2r-2\varphi_1\varphi_2p+(\varphi_2)^2q)>0\quad\text{in } F+R.$$

Es erhebt sich die Frage, wann solche Feldfunktionen vorhanden sind, denn von den allgemeinen Randwertproblemen sind uns nur solche zugänglich. Nach dem Kroneckerschen Satz und dessen Umkehrung sind solche Feldfunktionen dann und nur dann vorhanden, wenn das Vektorfeld $\{\mu_1(s),\mu_2(s)\}$ auf R von der Charakteristik Null ist, d.h.

wenn der Vektor $\{\mu_1, \mu_2\}$ bei einem Umlauf auf R die Gesamtdrehung Null erfährt[22]).

Wir wollen ein einfaches hinreichendes Kriterium angeben, wann solche Feldfunktionen sicher existieren.

Satz 10. *Genügen $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$ den Voraussetzungen des allgemeinen Randwertproblems und ist wenigstens μ_1 oder μ_2 auf R ohne Vorzeichenwechsel im engeren Sinne [d.h.: Es ist wenigstens $|\mu_1(s)| > 0$ oder $|\mu_2(s)| > 0$], so existieren Feldfunktionen.*

Beweis. φ_1, φ_2 seien Lösungen der Laplaceschen Gleichung $\Delta\varphi_1 = 0$, $\Delta\varphi_2 = 0$ mit den Randwerten $\varphi_1(s) = \mu_1(s)$, $\varphi_2(s) = \mu_2(s)$ auf R. Dann sind φ_1, φ_2 in $F + R$ stetig differenzierbar, in F zweimal stetig differenzierbar[23]). Ohne Einschränkung werde $\mu_1(s) \geq \varepsilon > 0$ auf R angenommen. Da eine Potentialfunktion ihr Maximum und Minimum auf R annimmt, folgt $\varphi_1 \geq \varepsilon > 0$ in $F + R$ und damit $(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 > 0$.

Nunmehr können alle Sätze des § 1, § 2 auch für das allgemeine Problem (1) mit der Randvorgabe $\mu_1(s)\, u + \mu_2(s)\, v = u_0(s)$ ausgesprochen werden. Wir übertragen nur Satz 2, da die anderen fast wörtlich erhalten bleiben. Es ist dabei der folgende Umstand zu beachten, auf den mich Herr W. Haack hinwies. Um für (28) die Abschätzung (9) zu gewährleisten, muß noch gezeigt werden, daß in $F + R$ gilt: $|a_{11}|$, $|a_{12}| < \Phi$, $\left|\frac{\partial a_{11}}{\partial x^i}\right|, \left|\frac{\partial a_{12}}{\partial x^i}\right| < \Psi$. Dabei sind Φ, Ψ von F unabhängige Konstante. Ohne Einschränkung darf $(a_{11})^2 + (a_{12})^2 = 1$ auf R angenommen werden. Das Vektorfeld $\{a_{11}, a_{12}\}$ ist auf R von der Charakteristik Null. Auf R werde $a_{11} = \cos\vartheta(s)$, $a_{12} = \sin\vartheta(s)$ gesetzt. $\vartheta(s)$ ist eine eindeutige, zweimal stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge s. Bestimmt man $\alpha(x^1, x^2)$ aus $\Delta\alpha = 0$ und $\alpha = \vartheta(s)$ auf R, so sind Feldfunktionen $a_{11} = \cos\alpha$ $a_{12} = \sin\alpha$ explizit konstruiert. Überschreiten μ_1, μ_2 und ihre zwei ersten Ableitungen auf R dem absoluten Betrag nach gewisse von F, Φ, Ψ abhängige Höchstwerte nicht, was wir in Satz 9 voraussetzen wollen, so findet man sofort solche Abschätzungen für a_{11}, a_{12} und in bekannter Weise[24]) folgen für a_{11}, a_{12} die obigen Ungleichungen.

Satz 9. *Existieren zu μ_1, μ_2 Feldfunktionen φ_1, φ_2, so hat das allgemeine Randwertproblem* (1) *mit $\mu_1(s)\, u + \mu_2(s)\, v = u_0(s)$ auf R und der zusätzlichen Normforderung*

$$\iint_F \{(\varphi_1 p - \varphi_2 q)\, u + (\varphi_1 r - \varphi_2 p)\, v\}\, k\, dx^1\, dx^2 = \gamma \tag{30}$$

genau ein Lösungssystem u, v. Dabei ist k eine beliebige Normierungsfunktion und γ eine gegebene reelle Zahl.

[22]) Alexandroff-Hopf, Topologie, Berlin 1935. Notwendig: S. 467—68, insbesondere für Vektorfelder S. 478—79; hinreichend: S. 499—500.

[23]) Siehe L. Lichtenstein[9]), S. 243.

[24]) Lichtenstein, L., Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Rend. Circ. mat. Palermo **28**, 1—40 (1909), S. 27.

Beweis. (1) kann auf (22) und mit den zu (29) angegebenen a_{11}, a_{12} nach (26) auf (28) umgeschrieben werden. Das allgemeine Randwertproblem wird für (28) gemäß (29) $\hat{U} = u_0$ auf R. Die Normforderung (30) wird für (28) nach (29) $\int\int \hat{V}\, k\, dx^1\, dx^2 = \int\int \hat{V}\, k_1 [\omega_1\, \omega_2]$ mit $k_1 = \frac{k}{\sqrt{D}}$ nach [20]). Nach den Entwicklungen von § 3 ist dieses Problem existenzmäßig vollständig gleich dem in Satz 2 gestellten.

Ganz andere Verhältnisse liegen bei der Nichtexistenz von Feldfunktionen vor. Wir betrachten das Gebiet $x^2 + y^2 \leq 1$ und stellen das Randwertproblem: $U_x - V_y = 0$, $U_y + V_x = 0$ mit der Randvorgabe $\sin s \cdot U + \cos s \cdot V = u_0$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ mit der Bogenlänge s. Man zeigt leicht, daß Feldfunktionen sicher nicht existieren [[2]) S. 205], was sich aber sogleich auf andere Weise ergeben wird. Seien nämlich zu $\mu_1(s) = \sin s$, $\mu_2(s) = \cos s$ Feldfunktionen vorhanden, so hätte die homogene Randwertaufgabe ($u_0 = 0$) nach Satz 4 von $U = 0$, $V = 0$ verschiedene Lösungen und die inhomogene Randwertaufgabe hätte nach Satz 5 oder 6 für jedes u_0 Lösungen. Beide Aussagen sind nicht richtig. Setzt man $U = \varphi_y$, $V = \varphi_x$, so geht obige Randwertaufgabe in die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie über: $\Delta\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -u_0(s)$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Daraus erschließt man leicht, daß die homogene Aufgabe nur die Lösung $U = 0$, $V = 0$ besitzt und die inhomogene nur dann Lösungen besitzt, wenn $\oint\limits_{\mathfrak{R}} u_0\, ds = 0$ ist. Damit ist gezeigt, daß Feldfunktionen φ_1, φ_2 bei der vorgelegten Aufgabe sicher nicht vorhanden sind.

Wird zu dem allgemeinen elliptischen System (1) die Randvorgabe $\mu_1(s)\, u + \mu_2(s)\, v = u_0(s)$ gestellt und existieren zu μ_1, μ_2 Feldfunktionen φ_1, φ_2, so nennen wir diese Problemstellung ein allgemeines Randwertproblem erster Art.

Für den Fall, daß zu μ_1, μ_2 Feldfunktionen nicht existieren, sei auf zwei demnächst erscheinende Arbeiten[24a]) von Herrn W. Haack verwiesen.

§ 4.

Das allgemeine Randwert- und Randwert-Normproblem im großen.

Nach den Entwicklungen des § 3 dürfen wir das erste Randwertproblem eines allgemeinen linearen elliptischen Systems in der Form (2) annehmen mit der Randvorgabe $U = U_0(s)$ auf $\mathfrak{R}$. Unseren bisherigen Sätzen lag für diese Problemstellung die durch (9) gegebene Gebietseinschränkung zugrunde.

Betrachten wir das Randwertproblem (2) ohne Gebietseinschränkung für $\mathfrak{R}$ oder, wie wir sagen wollen, im großen, so treten neue

[24a]) Zusatz bei der Korrektur: Haack, W., Allgemeine Randwertprobleme für Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Nachr. 7, 1—30 (1952). Randwertprobleme höherer Charakteristik für ein System von zwei elliptischen Differentialgleichungen. Math. Nachr. 8, 123—132 (1952).

Schwierigkeiten auf, da der zentrale Satz 2 dann nicht richtig bleibt. Wäre nämlich Satz 2 für beliebige Gebiete $\mathfrak{F}$ richtig, so müßte es auch Satz 3 sein. Wir zeigen, daß dies nicht der Fall ist.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{R}$ der Kreis $x^2+y^2=r^2$ mit Radius r und $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ das Gebiet, welches aus allen Punkten mit $x^2+y^2\leq r^2$ besteht. Betrachtet wird das System

$$U_x - V_y = \lambda\,(2y\,U + 2x\,V)$$
$$U_y + V_x = \lambda\,(-2x\,U + 2y\,V)$$

mit $U=0$ auf $\mathfrak{R}$. λ ist eine zunächst willkürliche reelle Zahl. Lösungen sind:

$$(31)\qquad U = \varkappa \sin\lambda\,(x^2+y^2-r^2), \qquad V = \varkappa\cos\lambda\,(x^2+y^2-r^2),$$

mit $\varkappa$ einer willkürlichen Konstanten[25]). Hat λ einen der Werte

$$(32)\qquad \lambda_k = \frac{k\pi}{r^2} \quad \text{mit} \quad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm\cdots,$$

so ist die Normbedingung $\iint V\,dx\,dy=0$ erfüllt, denn es ist

$$(5)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{F}} V\,dx\,dy = \varkappa\pi\,\frac{\sin\lambda r^2}{\lambda}.$$

Man erkennt sofort, daß für die Gültigkeit des Satzes 2 (mit $k=1$) das Gebiet so eingeschränkt werden muß, daß $r<\left|\frac{\pi}{\lambda}\right|$ ist.

Wir können uns daher nur auf die Ergebnisse des § 1 und auf einen Satz aus [3]) stützen, den wir hier nochmals formulieren.

Satz 11. *Jedes homogene Randwertproblem* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *hat gewiß ein Lösungssystem* U_H, V_H, *wobei* U_H, V_H *in* $\mathfrak{F}$ *nicht beide identisch verschwinden und damit sicher die unendlich vielen Lösungen* $U=\varkappa U_H$, $V=\varkappa V_H$. *Dabei ist* $\varkappa$ *eine willkürliche Konstante.*

Satz 11 zeigt, daß Eigenwertaufgaben in der üblichen Form hier nicht auftreten können. Ein allgemeines Eigenwertproblem zu (10) hätte doch die Form

$$(33)\qquad \begin{aligned} U_x - V_y + A_1\,U + A_2\,V &= \lambda\,(B_1\,U + B_2\,V)\\ U_y + V_x + \bar{A}_1\,U + \bar{A}_2\,V &= \lambda\,(\bar{B}_1\,U + \bar{B}_2\,V)\end{aligned}$$

mit $U=0$ auf $\mathfrak{R}$. $A_1 \ldots \bar{B}_2$ sind dabei Funktionen von x, y. In bekannter Sprechweise sagt dann Satz 11 aus, daß jedes System (33) jede reelle Zahl λ als Eigenwert besitzen würde[26]).

[25]) Für geeignet eingeschränktes Gebiet $\mathfrak{F}$ ist nach Satz 6 die Lösungsmenge (31) die Gesamtheit.

[26]) Sinnvoller scheint es dagegen zu sein, die Zahlen λ_k (32) als Eigenwerte anzusprechen, da bei geeignet eingeschränktem Gebiet $\mathfrak{F}$ nach dieser Formulierung Eigenwerte nicht auftreten (Satz 3), ein Vorkommnis, welches in Analogie zur Eigenwerttheorie bei elliptischen Differentialgleichungen steht.

Nach Satz 8 gibt es homogene Randwertprobleme (10) mit $U=0$ auf $\mathfrak{R}$ derart, daß die Lösungsgesamtheit aus $U=0$, V besteht. Für uns erweist sich hier die entsprechende Fragestellung für V von Wichtigkeit.

Satz 12. *Es gibt kein System* (10) *mit der Randvorgabe* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$, *welches als Lösungsgesamtheit* U, $V=0$ *besitzt.*

Beweis. Angenommen es gebe ein solches System, so müßte U eine Lösung des Systems

$$U_x = A\,U, \qquad U_y = \bar{A}\,U \tag{34}$$

sein, mit $U=0$ auf $\mathfrak{R}$. Das abgeschlossene Gebiet $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ kann sicher in ein Rechteck eingeschlossen werden, so daß für alle $(x, y) < \mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ die folgenden Ungleichungen gelten: $m \leq x \leq M$, $n \leq y \leq N$, mit m, M, n, N geeigneten Zahlen. Wir betrachten die erste Gleichung (34) auf der Geraden $y=y_0$ mit $n<y_0<N$. Diese Gerade wird vom Rand $\mathfrak{R}$ in endlich oder unendlich vielen Punkten geschnitten. Für alle Punkte (x, y_0), die auf dieser Geraden liegen, wird $U_x = A(x, y_0)\,U$ eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der Lösung

$$U(x, y_0) = \varkappa\, e^{\int A(\xi, y_0)\,d\xi}.$$

Ist (x, y_0) ein Schnittpunkt von $y=y_0$ mit $\mathfrak{R}$, so folgt, wegen der Vorgabe $U=0$ auf $\mathfrak{R}$, daß $U=0$ ist für alle Punkte $(x, y_0) < \mathfrak{F}+\mathfrak{R}$. Diese Schlußweise wird durchgeführt für alle y_0 und in entsprechender Weise für die zweite Gleichung in (34). Man erhält sofort $U=0$ in $\mathfrak{F}$. Damit ist ein System aufgefunden, welches nur die Lösung $U=0$, $V=0$ besitzt und dies ist ein Widerspruch zu Satz 11.

Jetzt machen wir für das Weitere die

Voraussetzung. *Es habe das homogene System* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *als Lösungsgesamtheit* $U=\varkappa U_H$, $V=\varkappa V_H$. *Dabei ist* U_H, V_H *irgendein Lösungssystem von* (6) *mit* $U_H=0$ *auf* $\mathfrak{R}$, *wobei* U_H, V_H *nicht beide in* $\mathfrak{F}$ *identisch verschwinden. (*$\varkappa$ *ist eine willkürliche Konstante.)*

Sicher ist diese Lösungsmenge nach Satz 11 immer vorhanden. Für geeignet eingeschränktes Gebiet $\mathfrak{F}$ ist diese Lösungsmenge nach Satz 6 gleich der Lösungsgesamtheit.

Satz 13. *Unter obiger Voraussetzung gibt es stets eine geeignete Normierungsfunktion* k[27]) *derart, daß das Randwertproblem* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\mathfrak{R}$ *und der zusätzlichen Normforderung* $\iint_{\mathfrak{F}} V\,k\,dx\,dy=0$ *als einzige Lösung* $U=0$, $V=0$ *in* $\mathfrak{F}$ *besitzt.*

Beweis. Sei die Lösungsgesamtheit U, V des Randwertproblems gegeben durch $U=\varkappa U_H$, $V=\varkappa V_H$, wie dies nach Voraussetzung möglich ist.

[27]) Wir nennen $k=k(x, y)$ eine Normierungsfunktion, wenn k in $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$ stetig und wesentlich positiv ist und in $\mathfrak{F}$ stetig differenzierbar ist. Vgl. § 1.

1. Der Fall $V_H = 0$ in $\mathfrak{F}$ kann nach Satz 12 nicht eintreten.
2. Es sei $V_H \geqq 0$ in $\mathfrak{F}$. Dann liefert die Normforderung

$$\iint V k \, dx \, dy = \varkappa \iint V_H k \, dx \, dy = 0.$$

Daraus folgt $\varkappa = 0$, da doch $k > 0$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ und daher $U = 0$, $V = 0$ in $\mathfrak{F}$. Analog bei $V_H \leq 0$ in $\mathfrak{F}$.

3. Es verbleibt nur der Fall, daß V sowohl positiver als auch negativer Werte fähig ist. Es ist $V_H(x, y)$ in $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ stetig, daher gibt es gewiß einen inneren Punkt $(x_0, y_0) < \mathfrak{F}$, wo V_H positiv ist. Es sei $V_H(x_0, y_0) = 2M$. Wegen der Stetigkeit gibt es einen Kreis K_δ vom Radius δ um (x_0, y_0): $x - x_0 = \delta \cos \varphi$, $y - y_0 = \delta \sin \varphi$ derart, daß alle Punkte (x, y) der abgeschlossenen Kreisfläche $\mathfrak{F}_\delta$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2$ zu $\mathfrak{F}$ gehören und daß $V_H(x, y) > M$ für alle $(x, y) < \mathfrak{F}_\delta$. Der größte Wert des absoluten Betrages von V_H werde in $(\xi_0, \eta_0) < \mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ angenommen:

$$|V_H(\xi_0, \eta_0)| = N.$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_\delta$ die Menge aller Punkte, die zu $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ aber nicht zu $\mathfrak{F}_\delta$ gehören. Aus $\iint V \, k \, dx \, dy = \varkappa \iint_{\mathfrak{F}} V_H \, k \, dx \, dy = 0$ folgt:

$$\varkappa \iint_{\mathfrak{F}_\delta} V_H \, k \, dx \, dy = - \varkappa \iint_{\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_\delta} V_H \, k \, dx \, dy. \tag{35}$$

Mit leichten Abschätzungen folgt aus (35)

$$|\varkappa| \, M \iint_{\mathfrak{F}_\delta} k \, dx \, dy \leq |\varkappa| \, N \iint_{\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_\delta} k \, dx \, dy. \tag{36}$$

Der folgende Hilfssatz zeigt, daß eine Normierungsfunktion k so gefunden werden kann, daß

$$\iint_{\mathfrak{F}_\delta} k \, dx \, dy > 1, \qquad \frac{N}{M} \iint_{\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_\delta} k \, dx \, dy < 1$$

ist. Aus (36) folgt $|\varkappa| < |\varkappa|$. Dieser Widerspruch kann nur durch $\varkappa = 0$ behoben werden. Damit ist Satz 13 bewiesen.

Hilfssatz. *Um den Mittelpunkt (x_0, y_0) des Kreises K_δ werde ein Kreis K_η mit dem Radius η gelegt derart, daß das Gebiet $\mathfrak{F}_\eta$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \eta^2$ das Gebiet $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ ganz im Innern enthält (Bild). Die Funktion*

$$k(x, y) = \gamma \cdot e^{\frac{1}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \beta^2}}$$

mit $\gamma = \dfrac{M}{(2\eta)^4 \, N \, e^{1/\delta^2}}$ *ist eine für $\mathfrak{F} + \mathfrak{R}$ zulässige Normierungsfunktion. Verfügt man über die Zahl β^2 mit $0 < \beta^2 < \delta^2$ geeignet so ist*

$$\text{a)} \ \frac{N}{M} \iint_{\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_\delta} k \, dx \, dy < 1, \qquad \text{b)} \ \iint_{\mathfrak{F}_\delta} k \, dx \, dy > 1.$$

Beweis. Es ist k eine überall positive, stetig differenzierbare Funktion von x, y, also gewiß eine Normierungsfunktion für $\mathfrak{F}+\mathfrak{R}$[27]). Für die folgenden Abschätzungen setzen wir $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$. Mit $\mathfrak{F}_\eta-\mathfrak{F}_\delta$ wird das Gebiet bezeichnet, dessen Punkte die Ungleichung $\delta^2 \leqq (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leqq \eta^2$ befriedigen. In den Integralen wird die Substitution $\frac{1}{r^2+\beta^2}=z$ mit $r\,dr=-\frac{dz}{2z^2}$ benutzt.

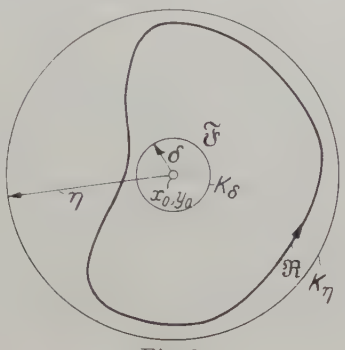

Fig. 1.

a) $$\underset{M}{N}\iint\limits_{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy < \underset{M}{N}\iint\limits_{\mathfrak{F}_\eta-\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy = \gamma\,\underset{M}{N}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\delta^\eta e^{\frac{1}{r^2+\beta^2}}\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= \pi\gamma\frac{N}{M}\int\limits_{\frac{1}{\eta^2+\beta^2}}^{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}}\frac{e^z}{z^2}\,dz < \pi\gamma\frac{N}{M}(\eta^2+\beta^2)^2\int\limits_{\frac{1}{\eta^2+\beta^2}}^{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}} e^z\,dz$$

$$= \pi\gamma\frac{N}{M}(\eta^2+\beta^2)^2\left(e^{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}}-e^{\frac{1}{\eta^2+\beta^2}}\right) < \pi\gamma\frac{N}{M}(2\eta^2)^2\,e^{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}} <$$

$$< \pi\gamma\frac{N}{M}(2\eta^2)^2\,e^{\frac{1}{\delta^2}} = \frac{\pi}{4} < 1$$

wegen der Bedeutung von γ.

b) $$\iint\limits_{\mathfrak{F}_\delta} k\,dx\,dy = \gamma\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\delta} e^{\frac{1}{r^2+\beta^2}}\,r\,dr\,d\varphi = \pi\gamma\int\limits_{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}}^{\frac{1}{\beta^2}}\frac{e^z}{z^2}\,dz >$$

$$> \pi\gamma\beta^4\int\limits_{\frac{1}{\delta^2+\beta^2}}^{\frac{1}{\beta^2}} e^z\,dz > \pi\gamma\beta^4\left(e^{\frac{1}{\beta^2}}-e^{\frac{1}{\delta^2}}\right).$$

Nun sind γ, δ vorgegebene Zahlen, die von β unabhängig sind. Es ist $\lim\limits_{\beta\to 0}\beta^4(e^{1/\beta^2}-e^{1/\delta^2})=\infty$. Daher kann ein β mit $0<\beta^2<\delta^2$ so gefunden werden, daß obiger Ausdruck größer als 1 wird, womit alles bewiesen ist.

Satz 14. *Hat das homogene Randwertproblem* (10) *mit* $U=0$ *auf* $\Re$ *als Lösungsgesamtheit* $U=\varkappa U_H$, $V=\varkappa V_H$, *so hat das inhomogene Randwertproblem* (2) *mit* $U=U_0$ *auf* $\Re$ *stets Lösungen. Ist* U_I, V_I *irgendeine Lösung von* (2)' *mit* $U_I=U_0$ *auf* $\Re$, *so ist* $U=\varkappa U_H+U_I$, $V=\varkappa V_H+V_I$ *die Lösungsgesamtheit des Randwertproblems* (2).

Beweis. Man sieht leicht, daß es genügt, die Existenz irgendeiner Lösung von (2) zu zeigen. Wir betrachten daher (2) mit $U=U_0$ auf $\Re$ und der zusätzlichen Normforderung $\iint V\,k\,dx\,dy=0$. Dieses Problem ist äquivalent dem Integralgleichungssystem (6) mit $\gamma=0$. Nach Satz 13 ist es stets möglich, eine Normierungsfunktion k so zu finden, daß das homogene Integralgleichungssystem (6) ($K_1=K_2=0$, $L_1=L_2=0$) nur die Lösung $U=0$, $V=0$ besitzt. Nach Satz 1 aus [3]) erschließt man daraus die Existenz genau eines Lösungspaares von (6). Wegen der Äquivalenz ist dies eine Lösung von (2) mit $U=U_0$ auf $\Re$. Addiert man die Lösungsgesamtheit des homogenen Problems hinzu, so erhält man die Behauptung.

Der Satz 7 bleibt wörtlich erhalten, dagegen muß Satz 2 jetzt so formuliert werden.

Satz 15. γ *sei eine beliebige reelle Zahl. Es gibt stets eine geeignet gewählte Normierungsfunktion* k *so, daß das Randwertproblem* (2) *mit* $U=U_0$ *auf* $\Re$ *und der Normforderung* $\iint V\,k\,dx\,dy=\gamma$ *genau ein Lösungssystem* U, V *besitzt.* k *ist dabei von* U_0, γ, C, C *unabhängig.*

Nach § 3 können die vorstehenden Sätze leicht auf das allgemeine Randwertproblem (1) mit der Randvorgabe $\mu_1(s)\,u+\mu_2(s)\,v=u_0(s)$ auf R übertragen werden. Für das Gebiet F bleibt beim allgemeinen Fall (1) nur die Einschränkung bestehen, die durch die Möglichkeit der Koordinatentransformation (23) gegeben ist.

(Eingegangen am 20. November 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 4, S. 409—442 (1952).

Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare.

Von

Martin Barner in Freiburg i. Br.

Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich mit Kurvenpaaren als einheitlichen geometrischen Gebilden. Nachdem zunächst die Ableitungsgleichungen aufgestellt sind, gewinnt man die Hauptsätze, wobei auf das Verhalten der Größen bei Parametertransformation und den zulässigen Umnormungen zu achten ist.

Im Mittelpunkt der geometrischen Interpretation der aufgestellten „FRENETschen Formeln" stehen in einem ersten Abschnitt berührende Kurven dritter Ordnung und damit verbundene Kegel, Quadriken, Korrelationen und Projektivitäten, in einem zweiten Abschnitt weiterhin Figuren, die auch mit der von dem Kurvenpaar erzeugten Regelfläche verknüpft sind. Auf die Theorie der Regelflächen wird dabei nicht eingegangen.

Um die Symmetrie in bezug auf beide Kurven des Paares zu wahren, hat man meist nicht eindeutig bestimmte, sondern ein- und mehrparametrige Gesamtheiten von Begleitfiguren zu betrachten. Diese Freiheit erweist sich dann aber als vorteilhaft. Man kommt so leicht zur Deutung eines vollen Invariantensystems durch Doppelverhältnisse. Außerdem sind die Figuren in vielfacher Weise untereinander verknüpft, was zu geometrischen Sätzen Anlaß gibt.

Diese können nicht alle explizit ausgesprochen werden. In einer Reihe von Bemerkungen, die beiden Abschnitten angefügt sind, werden die wichtigsten Eigenschaften erwähnt und die Bedingungen angegeben. Die Einfachheit der auftretenden Ausdrücke erlaubt ihren — und damit auch den geometrischen — Zusammenhang zu überblicken, auch wo darauf nicht besonders hingewiesen werden konnte.

§ 1.

Begleittetraeder und Ableitungsgleichungen.

Zwei punktweise aufeinander bezogene Kurven des dreidimensionalen projektiven Raumes bezeichnen wir als ein *Kurvenpaar*. Es sei ein gemeinsamer Parameter t eingeführt, so daß zu dem Punkt $R(t)$ der einen Kurve C der Punkt $\bar{R}(t)$ der andern Kurve $\bar{C}$ gehört.

Dabei werden die Stellen eines Kurvenpaares von der Untersuchung ausgeschlossen, in denen die Schmiegebene an die eine Kurve den zugeordneten Punkt der anderen enthält und in denen sich die Tangenten in zugeordneten Punkten treffen.

Es sei dann $S(t)$ der Schnittpunkt der Tangente an die Kurve C im Punkte $R(t)$ mit der Schmiegebene an die Kurve $\bar{C}$ im Punkte $\bar{R}(t)$; entsprechend sei auch $\bar{S}(t)$ definiert. Auf Grund der gemachten Voraussetzungen sind an jeder Stelle des Kurvenpaares die Punkte

$$R(t), \quad S(t), \quad \bar{S}(t), \quad \bar{R}(t) \tag{1.1}$$

linear unabhängig, sie bilden ein Tetraeder, das wir als *Begleittetraeder* benützen.

Wir beziehen das Kurvenpaar und die damit verbundenen Punkte auf ein projektives Koordinatensystem. Die Koordinatenvektoren der Punkte (1) bezeichnen wir mit gleichnamigen gotischen Buchstaben:

$$\mathfrak{r}(t), \quad \mathfrak{s}(t), \quad \bar{\mathfrak{s}}(t), \quad \bar{\mathfrak{r}}(t). \tag{1.2}$$

Die Normierung dieser Vektoren denken wir uns so eingerichtet, daß die Punkte $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{s}'$, $\bar{\mathfrak{s}}'$, $\bar{\mathfrak{r}}'$ jeweils in der den Punkten $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{r}}$ gegenüberliegenden Seitenebene des Begleittetraeders liegen[1]). Dann lauten die *Ableitungsgleichungen:*

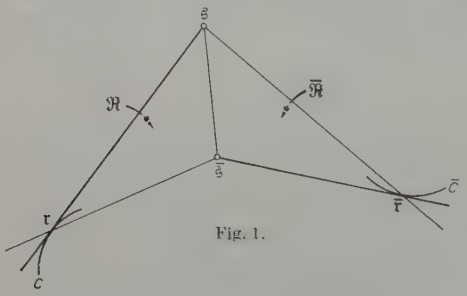

Fig. 1.

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}' &= a\,\mathfrak{s} \\ \mathfrak{s}' &= \bar{A}\,\mathfrak{r} + b\,\bar{\mathfrak{s}} \\ \bar{\mathfrak{s}}' &= A\,\bar{\mathfrak{r}} + \bar{b}\,\mathfrak{s} \\ \bar{\mathfrak{r}}' &= \bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Das Studium von Kurvenpaaren als einheitlichen geometrischen Gebilden läuft auf eine Diskussion dieser „FRENETschen Gleichungen" hinaus. Diese Gleichungen sind auch dann sinnvoll, wenn eine der Kurven in einen Punkt oder in eine Gerade entartet. Man hat dann aber eine Gerade als „Tangente" und eine Ebene durch diese Gerade als „Schmiegebene" zusätzlich zu definieren. Diese besonderen Kurvenpaare werden gekennzeichnet durch:

$a = 0$: $\mathfrak{r}$ ist ein fester Punkt,

$b = 0$: $\mathfrak{r}$ durchläuft eine Gerade,

$A = 0$: $\mathfrak{r}$ beschreibt eine ebene Kurve.

Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, wollen wir im folgenden die Koeffizienten

$$a, A, b, \bar{b}, \bar{A}, \bar{a}$$

[1]) Vgl. G. BOL, Projektive Differentialgeometrie, Teil 1, § 58, Aufgabe 11 und Aufgabe 13, S. 238. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1950.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden auf Anregung von Herrn Prof. Dr. G. BOL durchgeführt. Benützt werden die dort dargestellten Methoden und Bezeichnungsweisen. Wir zitieren fortan kurz: G. BOL, P. D.

von Null verschieden voraussetzen, d.h. wir nehmen an, daß unser Kurvenpaar aus zwei nichtentarteten (gewundenen) Raumkurven besteht.

Der gemachte Ansatz bringt es mit sich, daß die Vektoren (2) bis auf konstante Faktoren fest normiert sind. Bei der Umnormung

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{r}} &= k_1 \mathfrak{r} \\ \hat{\mathfrak{s}} &= k_2 \mathfrak{s} \\ \hat{\bar{\mathfrak{s}}} &= \bar{k}_2 \bar{\mathfrak{s}} \\ \hat{\bar{\mathfrak{r}}} &= \bar{k}_1 \bar{\mathfrak{r}} \end{aligned} \qquad k_i, \bar{k}_i = \text{const} \tag{1.4}$$

transformieren sich die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen nach (3) wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{k_1}{k_2} a, & \hat{\bar{a}} &= \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \bar{a}, \\ \hat{A} &= \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} A, & \hat{\bar{A}} &= \frac{k_2}{k_1} \bar{A}, \\ \hat{b} &= \frac{k_2}{\bar{k}_2} b, & \hat{\bar{b}} &= \frac{\bar{k}_2}{k_2} \bar{b}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Die Größen

$$b\bar{b}, \qquad a\bar{A}, \qquad \bar{a}A \tag{1.6}$$

behalten ihren Wert bei einer solchen Umnormung bei.

Gegenüber Parametertransformation sind die Tetraedereckpunkte (1) auf Grund ihrer geometrischen Definition invariant. Die Koeffizienten in (3) sind also Halbinvariante[2]) vom Gewicht 1. Demnach sind — dies ist für das Folgende von Wichtigkeit —

$$\frac{b\bar{b}}{a\bar{A}}, \qquad \frac{b\bar{b}}{\bar{a}A}, \qquad \frac{a\bar{A}}{\bar{a}A} \tag{1.7}$$

invariant sowohl gegenüber Parametertransformationen, als auch gegen Umnormierungen der Art (4).

Der Existenzsatz für lineare Differentialgleichungssysteme liefert uns — angewandt auf die Ableitungsgleichungen (3) — wie üblich den *Hauptsatz: Zwei Kurvenpaare*

$$\mathfrak{r}(t), \qquad \bar{\mathfrak{r}}(t); \qquad \tilde{\mathfrak{r}}(t), \qquad \tilde{\bar{\mathfrak{r}}}(t)$$

können dann und nur dann projektiv so aufeinander abgebildet werden, daß sich Punkte mit gleichen Parameterwerten entsprechen, wenn die Funktionen

$$a\bar{A}, \qquad \bar{a}A, \qquad b\bar{b}, \qquad \left(\ln\frac{b}{a}\right)', \qquad \left(\ln\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)', \qquad \left(\ln\frac{a}{\bar{a}}\right)' \tag{1.8}$$

für beide Kurvenpaare übereinstimmen. Denn sind die Funktionen (8) einander gleich, so auch die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen

[2]) G. Bol, P. D. § 1, S. 6.

(3) bis auf drei Konstanten, denen nach (5) in die Rechnung einzugehen erlaubt ist.

Als invarianter Parameter bietet sich

$$t^* = \int \sqrt{b\bar{b}}\, dt$$

an. Ist doch $b\bar{b}$ eine in bezug auf die Kurven des Paares symmetrische, nicht verschwindende Halbinvariante (vom Gewicht 2), die ihren Wert bei Umnormungen [s. (6)] nicht ändert. Bezogen auf t^* wird

$$b(t^*) \cdot \bar{b}(t^*) = 1$$

und es gilt: *Zwei Kurvenpaare*

$$\mathfrak{r}(t^*), \qquad \bar{\mathfrak{r}}(t^*); \qquad \tilde{\mathfrak{r}}(t^*), \qquad \tilde{\bar{\mathfrak{r}}}(t^*)$$

lassen sich dann und nur dann projektiv aufeinander abbilden, wenn die Größen

$$a\,\bar{A}, \qquad \bar{a}\,A, \qquad \left(\ln \frac{b}{a}\right)', \qquad \left(\ln \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)', \qquad \left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)'$$

als Funktionen des invarianten Parameters für beide Kurvenpaare übereinstimmen.

Die Seitenebenen des Begleittetraeders bezeichnen wir mit

$$\text{(1.9)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{R} &= \frac{1}{D}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}), & \bar{\mathfrak{R}} &= \frac{1}{D}(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{r}}) \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{D}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}}), & \bar{\mathfrak{S}} &= \frac{1}{D}(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{r}}), \end{aligned}$$

wobei

$$\text{(1.10)} \qquad D = (\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{r}})$$

eine Konstante ist; denn aus (3) folgt unmittelbar: $D' = 0$.

Die Bezeichnungsweise ist so gewählt, daß duale Größen einander entsprechen. So ist $\mathfrak{R}$ die Schmiegebene von $\mathfrak{r}$. $\mathfrak{s}$ ist der gemeinsame Punkt der Tangente von $\mathfrak{r}$ und der Schmiegebene von $\bar{\mathfrak{r}}$; entsprechend ist $\mathfrak{S}$ die durch die Tangente von $\mathfrak{r}$ und durch $\bar{\mathfrak{r}}$ bestimmte Ebene (vgl. Fig. 1).

Es gilt die Multiplikationstabelle:

$$\text{(1.11)}$$

	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{s}$	$\bar{\mathfrak{s}}$	$\bar{\mathfrak{r}}$
$\mathfrak{R}$	0	0	0	-1
$\mathfrak{S}$	0	0	1	0
$\bar{\mathfrak{S}}$	0	-1	0	0
$\bar{\mathfrak{R}}$	1	0	0	0.

Aus den Definitionsgleichungen (9) findet man mit Hilfe von (3) die Ableitungsgleichungen für die Ebenenvektoren:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}' &= A\,\mathfrak{S} \\ \mathfrak{S}' &= \bar{a}\,\mathfrak{R} + b\,\overline{\mathfrak{S}} \\ \overline{\mathfrak{S}}' &= a\,\overline{\mathfrak{R}} + \bar{b}\,\mathfrak{S} \\ \overline{\mathfrak{R}}' &= \bar{A}\,\overline{\mathfrak{S}}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Hieraus folgt: Aus jeder Gleichung, gültig für Punktkoordinaten, erhält man durch Ersetzen nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{r}, & \mathfrak{s}, & \overline{\mathfrak{s}}, & \overline{\mathfrak{r}}, & a, & A, & b, & \bar{b}, & \bar{A}, & \bar{a} \\ \mathfrak{R}, & \mathfrak{S}, & \overline{\mathfrak{S}}, & \overline{\mathfrak{R}}, & A, & a, & b, & \bar{b}, & \bar{a}, & \bar{A} \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

die entsprechende, gültig für Ebenenkoordinaten.

Der Übergang von einer Kurve zur andern innerhalb des Paares geschieht durch Ersetzen der überstrichenen Größen durch unüberstrichene und umgekehrt. Auch in Zukunft soll die Bezeichnungsweise immer in dieser Art eingerichtet werden.

Jeder Punkt $\mathfrak{p}$ und entsprechend jede Ebene $\mathfrak{P}$ des Raumes läßt sich in der Form

$$\mathfrak{p} = p_0\,\mathfrak{r} + p_1\,\mathfrak{s} + p_2\,\overline{\mathfrak{s}} + p_3\,\overline{\mathfrak{r}} \tag{1.14}$$

bzw.

$$\mathfrak{P} = a_0\,\mathfrak{R} + a_1\,\mathfrak{S} + a_2\,\overline{\mathfrak{S}} + a_3\,\overline{\mathfrak{R}} \tag{1.15}$$

darstellen; die p_i heißen *lokale Punkt-*, die a_i *lokale Ebenenkoordinaten* bezüglich des Begleittetraeders.

Die *Inzidenzbedingung* für einen Punkt $\mathfrak{p}$ und eine Ebene $\mathfrak{P}$ erhält nach der Multiplikationstabelle (1.11) in lokalen Koordinaten die Gestalt:

$$\mathfrak{P}\,\mathfrak{p} \equiv -a_0 p_3 + a_1 p_2 - a_2 p_1 + a_3 p_0 = 0^{3}). \tag{1.16}$$

Hieraus folgt insbesondere, daß die Fläche zweiter Klasse

$$\langle \mathfrak{P}, \mathfrak{P} \rangle \equiv \sum_{i,k=0}^{3} A_{ik}\,a_i\,a_k = 0 \qquad (A_{ik} = A_{ki}) \tag{1.17}$$

dann und nur dann Tangentenebenenmannigfaltigkeit der Fläche zweiter Ordnung

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle \equiv \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik}\,p_i\,p_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{1.18}$$

[3]) Dieser Ausdruck lehrt auch, daß beim Übergang von Punkt- zu Ebenenkoordinaten in Skalarprodukten die Vorzeichen zu wechseln sind.

ist, wenn die auftretenden Matrizen die Bedingung erfüllen:

$$(1.19)\qquad \begin{pmatrix} -a_{33} & a_{32} & -a_{31} & a_{30} \\ a_{23} & -a_{22} & a_{21} & -a_{20} \\ -a_{13} & a_{12} & -a_{11} & a_{10} \\ a_{03} & -a_{02} & a_{01} & -a_{00} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \Delta E .$$

wobei Δ ein verfügbarer Faktor ist und E die Einheitsmatrix darstellt.

Ein Punkt $\mathfrak{p}$ verhält sich stationär, wenn $\mathfrak{p}' - \varrho\,\mathfrak{p} = 0$. Hieraus gewinnt man mit Hilfe von (3) die *Stationaritätsbedingung:*

$$(1.20)\qquad \begin{aligned} -p_0' + \varrho\, p_0 &= \bar{A}\, p_1 \\ -p_1' + \varrho\, p_1 &= a\, p_0 + \bar{b}\, p_2 \\ -p_2' + \varrho\, p_2 &= \bar{a}\, p_3 + b\, p_1 \\ -p_3' + \varrho\, p_3 &= A\, p_2 . \end{aligned}$$

Man kann die lokalen Koordinaten etwa der Kurve $\mathfrak{r}$ in der Umgebung einer festen Stelle durch Reihen darstellen. Diese *kanonischen Reihen* folgen aus der Taylorentwicklung mit Hilfe von (3) zu:

$$(1.21)\qquad \begin{aligned} p_0 &= 1 \quad + a\bar{A}\frac{t^2}{2!} + \frac{(a^2 A)'}{a}\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ p_1 &= a\,t + a'\frac{t^2}{2!} + \{a'' + a^2 A + a\,b\,\bar{b}\}\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ p_2 &= a\,b\frac{t^2}{2!} + \frac{(a^2 b)'}{a}\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ p_3 &= a\,A\,b\frac{t^3}{3!} + \frac{(a^3 A\,b^2)'}{a^2 b}\frac{t^4}{4!} + \cdots . \end{aligned}$$

Von Wichtigkeit sind für uns insbesondere die Entwicklungen, die aus (21) folgen:

$$(1.22)\qquad \begin{aligned} p_0 p_2 - \alpha p_1^2 &= a\{b - 2\alpha a\}\frac{t^3}{2!} + \frac{1}{a}\{(a^2 b)' - 6\alpha a^2 a'\}\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ p_0 p_3 - \gamma p_1 p_2 &= a\,b\{A - 3\gamma a\}\frac{t^3}{3!} + \\ &\quad + \frac{1}{a^5 b}\{(a^3 A\,b^2)' a^3 - 2\gamma (a^7 b^2)'\}\frac{t^4}{4!} + \cdots \\ p_1 p_3 - \bar{\alpha} p_2^2 &= 2a^2 b\{2A - 3\bar{\alpha}\bar{b}\}\frac{t^4}{4!} + \\ &\quad + \frac{5}{a^3 b}\{(a^5 A\,b^2)' - 4\bar{\alpha} a^3 b^2 (a^2 b)'\}\frac{t^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

§ 2.

Berühr-C_3, Berührquadriken, Berührkorrelationen und Projektivitäten.

In diesem Abschnitt sprechen wir von Figuren, die lokal mit dem Kurvenpaar verknüpft sind, d.h. von berührenden Kurven dritter Ordnung, Kegeln, Kegelschnitten und Quadriken. Beginnen wir mit den Kurven dritter Ordnung.

Berühr-C_3 nennen wir eine Kurve dritter Ordnung, die mit jeder Kurve des Paares an der betrachteten Stelle Punkt, Tangente und Schmiegebene gemeinsam hat. In lokalen Koordinaten läßt sich eine solche C_3 darstellen in der Form[4]):

$$\begin{aligned} p_0 &= c_0 \\ p_1 &= c_1 s \\ p_2 &= c_2 s^2 \\ p_3 &= c_3 s^3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Diese Parameterdarstellung der C_3 ist dadurch ausgezeichnet, daß für $s=0$ bzw. $s=\infty$ die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ selbst erzielt werden — einen solchen Parameter nennen wir *speziellen projektiven Parameter*. Dieser gestattet nur noch die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen

$$s^* = \sigma s \qquad \sigma \neq 0, \text{ fest.} \tag{2.2}$$

Verfügen wir in (1) über den Proportionalitätsfaktor und in willkürlicher Weise — der einfacheren Rechnung wegen — auch über den speziellen projektiven Parameter, so gilt: *Jede Berühr-C_3 besitzt eine Parameterdarstellung*

$$\mathfrak{y}(s) = \alpha\,\mathfrak{r} + s\,\mathfrak{s} + s^2\,\bar{\mathfrak{s}} + \bar{\alpha}\,s^3\,\bar{\mathfrak{r}}; \tag{2.3}$$

mittels (2) führt man den allgemeinsten speziellen projektiven Parameter auf der C_3 ein.

Dual hierzu — die Berühr-C_3 bilden ihrer Definition nach eine in sich duale Gesamtheit[5]) — kann man diese beschreiben durch

$$\mathfrak{Y}(s) = \beta\,\mathfrak{R} + s\,\mathfrak{S} + s^2\,\bar{\mathfrak{S}} + \bar{\beta}\,s^3\,\bar{\mathfrak{R}}. \tag{2.4}$$

(4) sind die Schmiegebenen von (3), (3) die Kehlpunkte von (4), wobei die Beziehungen bestehen

$$3\alpha\bar{\beta} = 3\bar{\alpha}\beta = 1. \tag{2.5}$$

Eine Berühr-C_3 liegt auf den quadratischen Flächen

$$\begin{aligned} k &\equiv p_0 p_2 - \alpha p_1^2 = 0 \\ h &\equiv p_0 p_3 - \gamma p_1 p_2 = 0 \qquad \text{mit } \gamma = \alpha\bar{\alpha}. \\ \bar{k} &\equiv p_1 p_3 - \bar{\alpha} p_2^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Entwicklungen (1.22) zeigen, daß jede dieser Flächen jede Kurve des Paares dann und nur dann dreipunktig berührt, wenn

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{\bar{b}}{2\bar{a}}. \tag{2.7}$$

(7) *kennzeichnet die 3-Punkte-C_3.*

[5]) Vgl. auch G. Bol, P. D. § 21, S. 84.
[4]) G. Bol, P. D. § 22, S. 87.

Dual hierzu:

$$\beta = \frac{b}{2\bar{A}}, \qquad \bar{\beta} = \frac{\bar{b}}{2A} \tag{2.8}$$

kennzeichnet die 3-Ebenen-C_3:

3-Punkte-C_3 und 3-Ebenen-C_3 fallen im allgemeinen nicht zusammen. Spezielle Kurvenpaare, für die sich 3-Punkte-C_3 und 3-Ebenen-C_3 an jeder Stelle decken, nennen wir *Deckungspaare.* Setzt man (7) und (8) in (5) ein, so folgt: *Deckungspaare sind durch*

$$\frac{3b\bar{b}}{4a\bar{A}} = \frac{3b\bar{b}}{4\bar{a}A} = 1 \tag{2.9}$$

charakterisiert. Die linken Seiten von (9) haben sich in (1.7) als ausgezeichnete Invarianten eines Kurvenpaares gezeigt.

Die Kegel

$$h \equiv p_0 p_2 - \alpha p_1^2 = 0$$

seien *Berührkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Kurvenpaares genannt. Es sind dies die Projektionskegel der Berühr-C_3 aus dem Kurvenpunkt $\bar{\mathfrak{r}}$. Jeder von ihnen trägt eine einparametrige Schar von Berühr-C_3 auf sich. Die Entwicklungen (1.22) zeigen: *Die Berührkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ *sind die Kegel mit der Spitze in* $\bar{\mathfrak{r}}$, *die* $\bar{\mathfrak{r}}$ *vierpunktig und* $\mathfrak{r}$ *zweipunktig berühren.* Unter ihnen gibt es einen eindeutig bestimmten, der $\mathfrak{r}$ sogar dreipunktig berührt, den *Schmiegkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ *bezüglich des Paares. Er ist Projektionskegel der 3-Punkte-C_3 aus* $\bar{\mathfrak{r}}$, α hat für ihn den Wert (7). *Der Projektionskegel aus* $\bar{\mathfrak{r}}$ *der 3-Ebenen-C_3*, für den nach (8), (5)

$$\alpha = \frac{2\bar{A}}{3\bar{b}}$$

ist, *berührt* $\bar{\mathfrak{r}}$ nach (1.22) *nicht nur vier-, sondern fünfpunktig.*

Es folgt: *Im Büschel der Berührkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ *bildet der Projektionskegel der 3-Punkte-C_3 und der Projektionskegel der 3-Ebenen-C_3 mit den ausgearteten Elementen das Doppelverhältnis*

$$\frac{3b\bar{b}}{4\bar{a}A}. \tag{2.10}$$

Entsprechend deutet man die dazu symmetrische Invariante im Büschel der Berührkegel von $\mathfrak{r}$. Man kommt so auch zu einer Deutung der Invarianten

$$\frac{\bar{a}A}{a\bar{A}}, \tag{2.11}$$

die insbesondere dann gleich 1 ist, wenn die genannten Doppelverhältnisse in beiden Büscheln denselben Wert haben. Solche Kurvenpaare, die uns immer wieder durch ihre Symmetrieeigenschaften auffallen werden, bezeichnen wir nach Pantazi[6]). *Für* Pantazi-*Paare hat* (11)

[6]) Pantazi hat verschiedene Eigenschaften dieser Kurvenpaare angegeben. Diese und andere werden unten genannt werden. Siehe A. Pantazi: Sur le problème de Koenigs. Disquisit. math. et phys. Bucaresti 1, 357—368 (1941).

den Wert 1. Nach (9) folgt: *Deckungspaare sind spezielle* PANTAZI-*Paare.*

Das Büschel der Berührkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ mit dem projektiven Parameter α erzeugt durch Schnitt andere binäre Gebiete, insbesondere ein Kegelschnittbüschel in der Schmiegebene $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{c}$. Diese Kegelschnitte

$$p_0 p_2 - \alpha p_1^2 = 0, \qquad p_3 = 0 \tag{2.12}$$

werden auch erzeugt als die dualen Gebilde der Berührkegel von $\mathfrak{r}$, das sind die *Berührkegelschnitte von* $\mathfrak{R}$:

$$a_1 a_3 - \bar{\beta} a_2^2 = 0 \tag{2.13}$$

die alle mit $\mathfrak{R}$ vier und mit $\bar{\mathfrak{R}}$ zwei Ebenen gemeinsam haben. Der Kegelschnitt (12) wird von der Ebenenmannigfaltigkeit (13) eingehüllt, wobei

$$4\alpha\bar{\beta} = 1$$

ist. *Die Berührkegel von* $\bar{\mathfrak{r}}$ *schneiden in der Schmiegebene* $\mathfrak{R}$ *von* $\mathfrak{r}$ *die Berührkegelschnitte von* $\mathfrak{R}$ *aus.* Unter diesen hat der *Schmiegkegelschnitt von* $\mathfrak{R}$ *bezüglich des Paares* mit $\bar{\beta} = \dfrac{\bar{b}}{2\bar{A}}$ sogar drei Ebenen mit $\bar{\mathfrak{R}}$ gemeinsam, während der Berührkegelschnitt mit $\bar{\beta} = \dfrac{2a}{3b}$ sogar fünf Ebenen mit $\mathfrak{R}$ gemeinsam hat. Zusammenfassend heben wir hervor, daß in dem Büschel (12) außer den ausgearteten Elementen die Kegelschnitte mit

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \qquad \alpha = \frac{3b}{2a}, \qquad \alpha = \frac{\bar{A}}{2\bar{b}}, \qquad \alpha = \frac{2\bar{A}}{3\bar{b}} \tag{2.14}$$

geometrisch ausgezeichnet sind.

Die Quadriken

$$k \equiv p_0 p_3 - \gamma p_1 p_2 = 0 \tag{2.15}$$

tragen für jedes γ ein einparametriges System von Berühr-C_3. Sie bilden das Quadrikbüschel durch die Tangenten an die Ausgangskurven und die Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$, $(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})$. Wir nennen sie *Berührquadriken.* Sie berühren jede Kurve des Paares dreipunktig. Für

$$\gamma = \frac{A}{3a}$$

wird $\mathfrak{r}$ sogar vierpunktig berührt. Somit: *Im Büschel der Berührquadriken bilden die* $\mathfrak{r}$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{r}}$ *vierpunktig berührenden Quadriken mit den ausgearteten Elementen das Doppelverhältnis*

$$\frac{A\bar{a}}{\bar{A}a}. \tag{2.16}$$

Eine indirekte Deutung dieser Vollinvarianten gaben wir bereits in (11). Insbesondere: PANTAZI-*Paare lassen eine 4-Punkte-Berührquadrik zu.*

Entsprechendes gilt für die dualen Gebilde

$$K \equiv a_0 a_3 - \Gamma a_1 a_2 = 0.$$

Jede solche Fläche zweiter Klasse besteht aus den Tangentenebenen der Quadrik (15), für die $\gamma\Gamma = 1$. *Die Berührquadriken bilden eine bezüglich des Kurvenpaars in sich duale Gesamtheit von Quadriken.* Sie haben also auch drei Ebenen mit dem Kurvenpaar gemeinsam. *Gibt es eine 4-Punkte-Berührquadrik, so gibt es auch eine 4-Ebenen-Berührquadrik und umgekehrt, nämlich bei den* Pantazi-*Paaren.*

Die Auszeichnung der Berührquadriken wird besonders deutlich, wenn wir sie durch einen Grenzprozeß definieren. *Es gibt ein Büschel von Quadriken, die an einer Stelle t_0 die Schmiegebenen in einander zugeordneten Punkten des Paares berühren und das Punktepaar einer benachbarten Stelle t_1 enthalten. Läßt man beide Punkte zusammenrücken, so entsteht in der Grenze das Büschel der Berührquadriken.* Setzen wir nämlich unter Benützung des Symbols (1.18)

$$(2.17) \qquad f_1(t) = \langle \mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}(t)\rangle, \qquad f_2(t) = \langle \mathfrak{x}(t), \mathfrak{s}(t)\rangle, \qquad f_3(t) = \langle \mathfrak{x}(t), \bar{\mathfrak{s}}(t)\rangle$$

und entsprechend die symmetrischen Größen $\bar{f}_i(t)$, so lauten unsere Forderungen

$$(2.18) \qquad f_i(t_0) = \bar{f}_i(t_0) = 0, \qquad f_1(t_1) = \bar{f}_1(t_1) = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Nach dem Rolleschen Satz hat $f_1' = f_2$ und $\bar{f}_1' = \bar{f}_2$ zwischen t_0 und t_1 jeweils eine weitere Nullstelle und ebenso schließt man auf eine Nullstelle von $f_2', \bar{f}_2'$ im Intervall. Die Bedingungen

$$(2.19) \qquad f_1 = f_2 = f_2' = f_3 = \bar{f}_1 = \bar{f}_2 = \bar{f}_2' = \bar{f}_3 = 0,$$

an der Stelle t_0 betrachtet, sind linear unabhängig. Es ist ja

$$f_2' \equiv a\,\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s}\rangle \qquad (\mathrm{mod}\, f_1, f_3).$$

Sind t_0 und t_1 genügend benachbart, so folgt nach einem Satz von G. Bol[7]) daraus auch die lineare Unabhängigkeit der ursprünglichen Bedingungen (18). (19) definiert aber gerade die Berührquadriken.

Man folgert hieraus auch den Satz: *Die Berührquadriken sind die einzigen Quadriken, die drei Punkte und drei Ebenen mit jeder Kurve des Paares gemeinsam haben.*

Es ist nützlich, auch von berührenden Korrelationen und Projektivitäten zu sprechen und die eben angewandte Methode hierauf zu verallgemeinern. Sei also

$$(2.20) \qquad [\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}] \equiv \sum_{i,\,k=0}^{3} b_{ik}\, p_i\, \bar{p}_k$$

eine Bilinearform, die eine Korrelation definieren möge. Setzen wir

$$g_1(t) = [\mathfrak{x}(t), \mathfrak{x}(t)], \qquad g_2(t) = [\mathfrak{x}(t), \mathfrak{s}(t)], \qquad g_3(t) = [\mathfrak{x}(t), \bar{\mathfrak{s}}(t)],$$

[7]) G. Bol, Zur Definition von Schmiegfiguren in der Differentialgeometrie. Arch. d. Math. 1, 362—370 (1949). Vgl. auch G. Bol P. D. § 10, § 11, § 63.

so kennzeichnet

$$\begin{aligned} &g_1(t_0) = g_1(t_1) = g_1(t_2) = 0 \\ &g_2(t_0) = g_2(t_1) = 0 \\ &g_3(t_0) = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

eine Korrelation, die an einer Stelle $t_0 : \mathfrak{x}(t_0)$ *überführt in die Schmiegebene von* $\mathfrak{x}(t_0)$, *in* $t_1 : \mathfrak{x}(t_1)$ *abbildet auf eine Ebene durch die Tangente an* $\mathfrak{x}(t_1)$, *in* t_2 *gehört zu* $\mathfrak{x}(t_2)$ *eine Ebene durch* $\mathfrak{x}(t_2)$. Lassen wir die Punkte zusammenrücken, so gehen diese Forderungen in die wegen

$$\begin{aligned} &g_1 = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}] \\ &g_1' = a\,([\hat{\mathfrak{s}}, \mathfrak{x}] + [\mathfrak{x}, \hat{\mathfrak{s}}]) \\ &g_1'' \equiv a\,b\,[\bar{\mathfrak{s}}, \mathfrak{x}] + 2a^2\,[\hat{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{s}}] + a\,b\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{s}}] \pmod{g_1, g_1'} \\ &g_1''' \equiv 3a^2\,b\,([\hat{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{s}}] + [\bar{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{s}}]) + a\,A\,b\,([\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] + [\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}]) \\ &\qquad\qquad \pmod{g_1, g_1', g_1'', g_2, [\bar{\mathfrak{s}}, \mathfrak{x}], [\hat{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{s}}], [\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{s}}]} \\ &g_2 = [\mathfrak{x}, \hat{\mathfrak{s}}] \\ &g_2' \equiv a\,[\hat{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{s}}] + b\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{s}}] \pmod{g_1} \\ &g_2'' \equiv a\,b\,([\hat{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{s}}] + [\bar{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{s}}]) + a\,b\,[\hat{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{s}}] + A\,b\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] \\ &\qquad\qquad \pmod{g_1, g_1', g_2, [\hat{\mathfrak{s}}, \hat{\mathfrak{s}}], [\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{s}}]} \\ &g_3 = [\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{s}}] \\ &g_3' \equiv a\,[\hat{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{s}}] + A\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] \pmod{g_2} \\ &g_3'' \equiv a'\,[\hat{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{s}}] + A'\,[\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}] \pmod{g_2, g_2', \ldots} \end{aligned} \tag{2.22}$$

linear unabhängigen Bedingungen

$$g_1 = g_1' = g_1'' = g_2 = g_2' = g_3 = 0 \tag{2.23}$$

über. Wir können hierfür auch sagen, *der Kurvenpunkt wird an der betreffenden Stelle in nullter Ordnung auf seine Schmiegebene, in erster Ordnung auf eine Ebene durch die Tangente, in zweiter Ordnung auf eine Ebene durch den Kurvenpunkt abgebildet.*

Korrelationen, die diese Forderungen an einer bestimmten Stelle für beide Kurven des Paares erfüllen, nennen wir *Berührkorrelationen.* Sie ergeben sich nach (22), (23) in lokalen Koordinaten zu

$$a_i = d_i\,p_i, \qquad d_i \text{ beliebig.} \tag{2.24}$$

Die Berührkorrelationen sind genau die Korrelationen, die Berühr-C_3 *in Berühr-*C_3 *überführen, so daß die Eigenschaft eines Parameters, spezieller projektiver Parameter zu sein, dabei erhalten bleibt.*

Unter den Berührkorrelationen gibt es ein Büschel von Nullsystemen, zu denen die *Berührkomplexe*[8]) gehören ($d_0 = d_3$, $d_1 = d_2$), und ein Büschel

[8]) Man vergleiche hierzu auch S. Finikoff, Couple de courbes stratifiables. Rev. Univ. Tucumán **6**, 289—312 (1948).

von Polaritäten, die sich auf die Berührquadriken beziehen ($d_0 = -d_3$, $d_1 = -d_2$). Letztere Eigenschaft kennzeichnet die Berührquadriken. Diese sind auch die Inzidenzgebilde der Berührkorrelationen, falls diese nicht entarten. Die Nullsysteme führen die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in dritter Ordnung in eine Ebene durch $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ über und dies charakterisiert die Nullsysteme unter den Berührkorrelationen, falls das Ausgangspaar kein PANTAZI-Paar ist. PANTAZI-Paare andererseits sind die Kurvenpaare, die auch Berührkorrelationen der genannten Art zulassen, die keine Nullsysteme sind.

Es läßt sich nun gerade *eine* eindeutig bestimmte, symmetrische, berührende Korrelation durch einen Grenzprozeß festlegen. Zu den Bedingungen (21) und den dazu symmetrischen fügen wir die Forderungen hinzu, in t_1 möge $\mathfrak{r}(t_1)$ und $\bar{\mathfrak{r}}(t_1)$ jeweils in seine Schmiegebene, in t_2 möge einer der Ausgangspunkte, etwa $\mathfrak{r}(t_2)$ sogar in eine Ebene durch die Tangente abgebildet werden, d.h. also:

$$g_3(t_1) = \bar{g}_3(t_1) = g_2(t_2) = 0\ ^{9}). \tag{2.25}$$

Läßt man die Punkte nun zusammenrücken, so entstehen außer (23) und den dazu symmetrischen Relationen noch die Bedingungen

$$g_3' = \bar{g}_3' = g_2'' = 0, \tag{2.26}$$

und mittels (22) gewinnt man hieraus in lokalen Koordinaten:

$$a_0 = \frac{a}{A} p_0, \qquad a_1 = p_1, \qquad a_2 = p_2, \qquad a_3 = \frac{\bar{a}}{\bar{A}} p_3. \tag{2.27}$$

Diese Korrelation führt die Punkte der 3-Punkte-C_3 in die Ebenen der 3-Ebenen-C_3 über.

PANTAZI-Paare spielen, wie wir schon sahen, in verschiedener Weise eine Sonderrolle. Für sie ist z.B. die Korrelation (27) involutorisch, sie führt hier $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in dritter Ordnung in eine Ebene durch $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ über. Zusammenfassend heben wir hervor: *Mit* PANTAZI-*Paaren ist ein ausgezeichnetes Nullsystem verbunden. Es führt jeden der Ausgangspunkte in erster Ordnung in seine Schmiegebene, in zweiter Ordnung in eine Ebene durch die Tangente und in dritter Ordnung in eine Ebene durch den Kurvenpunkt über. Der zugehörige Komplex ist 3-Tangentenkomplex*[10]).

Führt das Nullsystem eines PANTAZI-Paares etwa $\mathfrak{r}$ an einer Stelle sogar in dritter Ordnung in seine Schmiegebene über, so ist dieses Nullsystem an dieser Stelle stationär. Gilt dies überall, so ist das Nullsystem

[9]) $\bar{g}_2(t_2) = 0$ wird *nicht* gefordert, würde jedoch an Stelle der im Text angegebenen Bedingung, $\bar{g}_2(t_2) = 0$, auf die gleiche Korrelation führen.

[10]) PANTAZI-Paare spielen auf Grund dieses Zusammenhangs auf Komplexflächen eine große Rolle. Deren Theorie kann mit ihrer Hilfe besonders anschaulich aufgebaut werden. Vgl.: M. BARNER, Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. I, II. Math. Annalen 1952 (im Erscheinen).

fest längs des Kurvenpaares, jede Kurve ist Komplexkurve, demselben Komplex zugehörig. Wir sprechen von einem *Komplexpaar. Komplexpaare sind durch*

$$a = c\,A, \qquad \bar{\alpha} = c\,\bar{A}, \qquad c = \text{const.} \tag{2.29}$$

gekennzeichnet.

Bemerkungen. 1. Hat der Schmiegkegel von $\mathfrak{r}$ bezüglich des Paares mit $\mathfrak{r}$ fünf Punkte gemein, so hat der Schmiegkegelschnitt von $\overline{\mathfrak{R}}$ bezüglich des Paares mit $\overline{\mathfrak{R}}$ fünf Ebenen gemeinsam und umgekehrt. Kennzeichnend hierfür ist

$$\frac{3b\bar{b}}{4\bar{a}A} = 1. \tag{2.30}$$

Es folgt: Bei den Deckungspaaren und nur bei diesen haben die Schmiegkegel (bzw. Schmiegkegelschnitte) von $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares mit $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ fünf aufeinanderfolgende Punkte (Schmiegebenen) gemein.

2. Die Berühr-C_3 mit

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{2A}{3b} \tag{2.31}$$

ist in sich dual, aber nicht symmetrisch. Sie hat mit $\mathfrak{r}$ drei Punkte und mit $\mathfrak{R}$ drei Ebenen gemeinsam und ist dadurch bestimmt. Sie liegt also auf dem Schmiegkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares und schneidet in der Schmiegebene von $\bar{\mathfrak{r}}$ den Schmiegkegelschnitt von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares aus. Die Berühr-C_3 (31) wird andererseits in dem Schmiegkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ von *dem* Berührkegel von $\mathfrak{r}$ ausgeschnitten, der $\mathfrak{r}$ fünfpunktig berührt. Dual: Die Schmiegebenen von (31) schneiden in $\mathfrak{R}$ einen Berührkegelschnitt aus, der mit $\mathfrak{R}$ fünf Ebenen gemeinsam hat. Auch ist sie der Schnitt des Schmiegkegels von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares mit *der* Berührquadrik, die $\mathfrak{r}$ vierpunktig berührt. (31) ist 3-Punkte-C_3, wenn (30) gilt.

3.

$$\left(\ln \frac{b}{a}\right)' = 0 \tag{2.32}$$

kennzeichnet den Fall, daß der Schmiegkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares $\mathfrak{r}$ sogar vierpunktig berührt. Genau in diesem Fall existiert eine $\mathfrak{r}$ vierpunktig berührende Berühr-C_3, deren Invarianten den Wert (31) haben, so daß alles in Bemerkung 2 Gesagte auf diese Berühr-C_3 zutrifft. Ist die Berühr-C_3 3-Punkte-C_3, so gilt überdies (30), und der erste Teil der Bemerkung 1 tritt in Kraft. Man folgert: *Nur die Deckungspaare mit*

$$\left(\ln \frac{b}{a}\right)' = \left(\ln \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)' = 0 \tag{2.33}$$

lassen eine 4-Punkte-C_3 zu. Wir beweisen: *Läßt ein Kurvenpaar eine 4-Punkte-C_3 zu, so besteht es aus einer doppelt durchlaufenen Kurve dritter Ordnung.*

Damit nämlich jeder Punkt der Berühr-C_3 (3) stationär ist, muß nach (1.20) [in (3) ist s als Funktion von t zu betrachten]

$$\begin{aligned} -\alpha' + \varrho\,\alpha &= \bar{A}\,s \\ -s' + \varrho\,s &= a\,\alpha + \bar{b}\,s^2 \\ -2s\,s' + \varrho\,s^2 &= \bar{a}\,\bar{\alpha}\,s^3 + b\,s \\ -(\bar{\alpha}s^3)' + \varrho\,\bar{\alpha}s^3 &= A\,s^2. \end{aligned}$$

Elimination von $s'(t)$ und ϱ führt auf

$$(b - 2a\,\alpha) + (\ln\alpha)'\,s + \left(\frac{\bar{A}}{\alpha} + \bar{a}\,\bar{\alpha} - 2\bar{b}\right)s^2 = 0$$

$$\left(\frac{A}{\bar{\alpha}} + \alpha\,a - 2b\right) + (\ln\bar{\alpha})'\,s + \qquad (\bar{b} - 2\bar{\alpha}\bar{a})\,s^2 = 0,$$

und das identische Verschwinden dieser Ausdrücke liefert (7), (9), (33).

Man beachte auch die dualen Aussagen. Das Bedingungssystem (9), (33) ist natürlich in sich dual.

4. Es gibt einen $\bar{\mathfrak{r}}$ sechspunktig berührenden Berührkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$, falls gilt:

$$\left(\ln\frac{\bar{A}^3}{\bar{a}\,\bar{b}^2}\right)' = 0.$$

5. Im Büschel der Berührkegelschnitte von $\mathfrak{r}$ bilden z. B. der Schmiegkegelschnitt von $\mathfrak{r}$ bezüglich des Paares und der Schnitt der Schmiegebene $\mathfrak{R}$ mit dem Projektionskegel der 3-Ebenen-C_3 mit den ausgearteten Elementen das Doppelverhältnis $\frac{1}{3}$.

6. Im Büschel der Berührquadriken eines Pantazi-Paares bilden die 4-Punkte-Berührquadrik und die 4-Ebenen-Berührquadrik mit den ausgearteten Elementen das Doppelverhältnis 9.

7. Es gibt eine $\mathfrak{r}$ fünfpunktig berührende Berührquadrik, wenn

$$\left(\ln\frac{A^3\,b^2}{a^5}\right)' = 0.$$

8. Es gibt im allgemeinen eine eindeutig bestimmte 4-Punkte-Quadrik der Eigenschaft, daß die 3-Punkte-C_3 auf ihr liegt. Ein ganzes Büschel solcher Quadriken gibt es nur, wenn entweder die Schmiegkegel von $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares $\bar{\mathfrak{r}}$ bzw. $\mathfrak{r}$ vierpunktig berühren (diese Schmiegkegel spannen dann das genannte Büschel auf), oder wenn eine $\mathfrak{r}$ oder $\bar{\mathfrak{r}}$ vierpunktig berührende 3-Punkte-C_3 existiert. Entartet das Paar in eine doppelt durchlaufene C_3, so gibt es natürlich ∞^2 Quadriken der genannten Art, und diese Eigenschaft ist kennzeichnend.

Insbesondere liegt bei Deckungspaaren die 3-Punkte-C_3 auf der 4-Punkte-Berührquadrik. Die Schmiegebenen der 3-Punkte-C_3 sind hier

Tangentenebenen der 4-Ebenen-Berührquadrik. Beides charakterisiert die Deckungspaare.

9. Die Ebenen $\mathfrak{E}(t)$ hüllen eine Kurve ein. Der Kehlpunkt ergibt sich nach (1.11), (1.12) zu:

$$\frac{1}{a}\left(\ln\frac{b}{\bar{a}}\right)'\mathfrak{r}+\mathfrak{s}-\frac{b}{\bar{a}}\bar{\mathfrak{r}}. \tag{2.34}$$

Die Projektion dieses Kehlpunktes von $\mathfrak{r}$ auf die Gerade $(\mathfrak{s},\bar{\mathfrak{r}})$ liefert den Punkt $\mathfrak{s}-\frac{b}{\bar{a}}\bar{\mathfrak{r}}$, während die Tangente an die Kurve $\bar{\mathfrak{s}}(t)$ diese Gerade in $\mathfrak{s}+\frac{A}{\bar{b}}\bar{\mathfrak{r}}$ trifft. Diese beiden Punkte bilden also mit $\mathfrak{s}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ das Doppelverhältnis

$$-\frac{b\bar{b}}{\bar{a}A}.$$

Zieht man noch den Kehlpunkt der Torse $\bar{\mathfrak{E}}(t)$ heran, so kommt man entsprechend zu den Punkten

$$\bar{\mathfrak{r}}-\frac{\bar{a}}{a\,b}\left(\ln\frac{b}{\bar{a}}\right)'\mathfrak{r},\qquad \mathfrak{r}-\frac{a}{\bar{a}\,\bar{b}}\left(\ln\frac{\bar{b}}{a}\right)'\bar{\mathfrak{r}},$$

wenn man von $\mathfrak{s}$ bzw. $\bar{\mathfrak{s}}$ aus projiziert. Sie bilden mit $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ auf $(\mathfrak{r},\bar{\mathfrak{r}})$ das Doppelverhältnis

$$\frac{1}{b\,\bar{b}}\left(\ln\frac{\bar{b}}{a}\right)'\left(\ln\frac{b}{\bar{a}}\right)'. \tag{2.35}$$

Entsprechend dual.

Anmerkung bei der Korrektur: Inzwischen hat Herr Süss[10a]) Kurvenpaare behandelt, bei denen in zugeordneten Punkten die Tangente der einen Kurve zur Schmiegebene der anderen parallel ist. Von unserem Standpunkt aus bedeutet dies, daß etwa $\mathfrak{s}$ sich in der unendlich fernen Ebene bewegt.

Die Schmiegebene von $\mathfrak{s}$ wird in Dualisation von (34) dargestellt durch

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{A}\left(\ln\frac{b}{A}\right)'\mathfrak{R}+\mathfrak{S}-\frac{b}{A}\bar{\mathfrak{R}}.$$

Diese Ebene ist fest, falls $\mathfrak{D}'-\varrho\,\mathfrak{D}=0$, und dies führt nach (1.12) auf die Bedingung

$$\left(\ln\frac{\bar{d}}{A}\right)'+\frac{\bar{a}A}{\bar{d}}-\bar{d}=0,$$

wobei

$$\bar{d}=\left(\ln\frac{b}{A}\right)'$$

gesetzt ist. Hierdurch sind also die von Herrn Süss betrachteten Kurvenpaare in unserer Schreibweise charakterisiert.

[10a]) W. Süss, Affine Differentialgeometrie von Kurvenpaaren im Raum. Archiv der Math. **3**, 137—141 (1952).

10. Aus (1.3) gewinnt man die Ableitungsgleichungen in Geradenkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})' = b(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}) \\
&(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})' = \bar{b}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}) + A(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}) + a(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}) \\
&(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})' = \bar{a}(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}) + a(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}}) \\
&(\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{s}})' = \bar{b}(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s}) \\
&(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})' = b(\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{s}}) + \bar{A}(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{r}) + \bar{a}(\bar{\mathfrak{s}}, \mathfrak{s}) \\
&(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})' = \bar{A}(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}) + A(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}}).
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Man sieht hieraus z.B.: Die Bilder der beiden Regelflächen $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ im Geradenraum definieren ihrerseits im R_5 eine Regelfläche, die bei PANTAZI-Paaren und nur bei diesen eine Torse ist. Bei einem Komplexpaar ist der Kehlpunkt dieser Torse fest, er bestimmt den linearen Komplex, dem jede Kurve des Paares angehört.

Die Berührkomplexe sind dargestellt durch $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}) + \delta(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$. Unter ihnen gibt es je einen, der mit $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar drei Tangenten gemein hat. Es entsteht wieder das Doppelverhältnis (11). Es folgt auch: Bei Dekkungspaaren existiert ein 3-Tangenten-Komplex und dieser ist zugeordneter Komplex der 3-Punkte-C_3 (3-Ebenen-C_3). Damit ein Berührkomplex vier Tangenten etwa mit $\mathfrak{r}$ gemein hat, muß sein:

$$\left(\ln \frac{A}{a}\right)' = 0.$$

11. Bei Komplexpaaren gehören die Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$ und $(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})$ ebenfalls dem ausgezeichneten Komplex an. PANTAZI-Paare, die keine Komplexpaare sind, gestatten nur dann einen Komplex, der jeweils drei aufeinanderfolgende Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$ und $(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})$ enthält, wenn gilt:

$$\left(\ln \begin{matrix} \bar{a} & \bar{b} \\ a & b \end{matrix}\right)' = 0;$$

dieser Komplex enthält jeweils sogar vier dieser Geraden, wenn:

$$\bar{b} + c_1 A + c_2 a = 0 \qquad (c_i = \text{const, nicht beide} = 0).$$

Der zugehörige Komplex ist dann fest längs des Kurvenpaares. Dies ist also nach Bemerkung 9 zum Beispiel dann bei einem PANTAZI-Paar der Fall, wenn die Kehlpunkte von $\mathfrak{E}$ und $\bar{\mathfrak{E}}$ auf $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}})$ bzw. $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$ liegen.

12. Je zwei der folgenden Aussagen ziehen die anderen nach sich:

1. Der Schmiegkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich des Paares berührt $\mathfrak{r}$ sogar vierpunktig.
2. Es gibt einen $\mathfrak{r}$ sechspunktig berührenden Berührkegel von $\mathfrak{r}$.
3. Es gibt eine $\mathfrak{r}$ fünfpunktig berührende Berührquadrik.
4., 5., 6. Die hierzu dualen Aussagen.

7. Es gibt einen Berührkomplex, der mit $\mathfrak{r}$ vier Tangenten gemein hat. Solche Kurvenpaare sind durch

$$a = c_1 b = c_2 A \qquad (c_i = \text{const})$$

gekennzeichnet.

13. Zwei der folgenden Aussagen bedingen die anderen:

1. Die Schmiegkegel von $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ bezüglich eines PANTAZI-Paares berühren $\bar{\mathfrak{r}}$ bzw. $\mathfrak{r}$ vierpunktig.
2. Ein PANTAZI-Paar läßt jeweils einen $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ sechspunktig berührenden Berührkegel von $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ zu.
3. Es gibt eine 5-Punkte-Berührquadrik.
4., 5., 6., Die hierzu dualen Aussagen.
7. Es handelt sich um ein Komplexpaar.

Charakteristisch ist hier

$$a = c_1 A = c_2 b, \qquad \bar{a} = c_1 \bar{A} = c_3 \bar{b} \qquad (c_i = \text{const}). \tag{2.37}$$

14. Kurvenpaare, für die (37) gilt, sind dann und nur dann in doppelt durchlaufene C_3 entartet, wenn zwischen den Konstanten in (37) die Bedingung besteht:

$$3c_1 - 4c_2 c_3 = 0.$$

Dies ist z. B. der Fall, wenn einem Deckungspaar eine der Eigenschaften von Bemerkung 13 (außer 7.) zukommt. Es gibt aber sehr wohl Deckungspaare, die zugleich Komplexpaare sind, die nicht in eine doppelt durchlaufene C_3 entarten.

15. Unter den Berührkorrelationen gibt es ein Büschel von Nullsystemen und ein Büschel von Polaritäten. Die folgenden Aussagen gelten für beide Gebilde in gleicher Weise.

In einem Büschel involutorischer Berührkorrelationen hat das Doppelverhältnis der Korrelationen, die $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in erster Ordnung in ihre Schmiegebene (die $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in zweiter Ordnung in eine Ebene durch die Tangente — bei Polaritäten: die $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in dritter Ordnung in eine Ebene durch $\mathfrak{r}$ bzw. $\bar{\mathfrak{r}}$) überführen, mit den ausgearteten Elementen den Wert (11). Diese Ordnungen erhöhen sich wenn $a = \text{const}\, A$ bzw. $\bar{a} = \text{const}\, \bar{A}$.

Es gibt dann und nur dann eine involutorische Berührkorrelation, die zwei Berühr-C_3 mit den Invarianten $\alpha, \bar{\alpha}; \hat{\beta}, \hat{\bar{\beta}}$ ineinander überführt, wenn zwischen diesen die Beziehung besteht:

$$\alpha \hat{\bar{\beta}} - \bar{\alpha} \hat{\beta} = 0.$$

Also: Nur bei PANTAZI-Paaren gibt es eine involutorische Berührkorrelation, die die 3-Punkte-C_3 in die 3-Ebenen-C_3 abbildet. Und allgemeiner: Wir greifen eine beliebige Berühr-C_3 heraus, denken uns diese aber fest

gewählt. Gibt es eine involutorische Berührkorrelation, die diese C_3 als Ebenenmannigfaltigkeit auf die 3-Punkte-C_3 und ferner diese C_3 als Punktmannigfaltigkeit auf die 3-Ebenen-C_3 abbildet, so ist das Kurvenpaar ein PANTAZI-Paar.

In jedem der genannten Fälle heißt dies: Gibt es ein Nullsystem, das das Gewünschte leistet, so gibt es auch eine Polarität und umgekehrt.

16. Die verschiedenen Gebilde, die wir betrachteten, sind untereinander geometrisch verknüpft. Die Zuordnung der Parameter ist dabei meist eine projektive, so daß das Doppelverhältnis ausgezeichneter Elemente sich dabei überträgt. Man gelangt so in verschiedener Weise zu den Invarianten (1.7) und daraus folgenden geometrischen Aussagen.

17. Genau wie die berührenden Korrelationen untersucht man lokal definierte Projektivitäten, die die beiden Kurven in gewisser Weise miteinander vertauschen. Wir skizzieren den Vorgang kurz. Möge

$$\{\mathfrak{p}, \mathfrak{P}\} \equiv \sum_{i,k=0}^{3} c_{ik}\, p_i a_k = 0$$

die Projektivität definieren; setzen wir

$$h_1 = \{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{R}}\}, \qquad h_2 = \{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{S}}\}, \qquad h_3 = \{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\},$$

so gelangt man wie oben zu den Bedingungen für die Berührprojektivitäten (die symmetrischen Relationen hat man hinzuzufügen):

$$h_1 = h_1' = h_1'' = h_2 = h_2' = h_3 = 0.$$

Es wird:

$$h_1 = \{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{R}}\}$$

$$h_1' = a\{\mathfrak{s}, \overline{\mathfrak{R}}\} + \bar{A}\{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{S}}\}$$

$$h_1'' \equiv a\,b\{\bar{\mathfrak{s}}, \overline{\mathfrak{R}}\} + 2a\,\bar{A}\{\mathfrak{s}, \overline{\mathfrak{S}}\} + \bar{A}\,\bar{b}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\} \qquad (\mathrm{mod}\, h_1 h_1')$$

$$h_1''' \quad \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{A}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}\} + 3a\,\bar{b}\,\bar{A}\{\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\} + 3a\,b\,\bar{A}\{\bar{\mathfrak{s}}\,\overline{\mathfrak{S}}\} + a\,b\,A\{\bar{\mathfrak{r}}, \overline{\mathfrak{R}}\}$$

$$(\mathrm{mod}\, h_1, h_1', h_2, \{\bar{\mathfrak{s}}, \overline{\mathfrak{R}}\}, \{\mathfrak{s}, \overline{\mathfrak{S}}\}, \{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\})$$

$$h_2 = \{\mathfrak{r}, \overline{\mathfrak{S}}\}$$

$$h_2' \equiv a\{\mathfrak{s}, \overline{\mathfrak{S}}\} + \bar{b}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\} \quad (\mathrm{mod}\, h_1)$$

$$h_2'' \equiv \bar{a}\,\bar{b}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}\} + 2a\,\bar{b}\{\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\} + a\,b\{\bar{\mathfrak{s}}, \overline{\mathfrak{S}}\} \quad (\mathrm{mod}\, h_1 . h_1' . h_2 . h_2')$$

$$h_3 = \{\mathfrak{r}, \mathfrak{S}\}$$

$$h_3' \equiv a\{\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\} + \bar{a}\{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}\} \quad (\mathrm{mod}\, h_2)$$

$$h_3'' \equiv a'\{\mathfrak{s}, \mathfrak{S}\} + \bar{a}'\{\mathfrak{r}, \mathfrak{R}\} \quad (\mathrm{mod}\, \ldots).$$

Die *Berührprojektivitäten* mögen nach Definition an einer Stelle jeden der Kurvenpunkte in nullter Ordnung in den zugehörigen Punkt der anderen Kurve, in erster Ordnung auf einen Punkt der Tangente an die

andere Kurve und in zweiter Ordnung in einen Punkt der Schmiegebene der anderen Kurve abbilden. Für sie ist dann

$$p_i^* = e_i\, p_{3-i}.$$

Also: Gerade die involutorischen Berührprojektivitäten ($e_0 e_3 = e_1 e_2$) führen Berühr-C_3 so in sich über, daß die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ vertauscht werden.

Auch hier gelangt man zu einer eindeutig bestimmten, symmetrischen Projektivität, indem man neben (38) und den dazu symmetrischen Bedingungen verlangt:

$$h_2'' = h_3' = \bar{h}_3' = 0.$$

Man erhält:

$$(2.39)\quad p_0^* = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\, p_3, \qquad p_1^* = \bar{b}\, p_2, \qquad p_2^* = b\, p_1, \qquad p_3^* = \frac{a\, b}{\bar{a}}\, p_0.$$

Diese Projektivität führt die 3-Punkte-C_3 in sich über. Sie ist involutorisch und wird auch erzeugt durch Spiegelung an dem Geradenpaar

$$(2.40)\qquad \left(a\sqrt{b}\,\bar{\mathfrak{x}} \pm \bar{a}\sqrt{\bar{b}}\,\mathfrak{x},\ \sqrt{b}\,\bar{\mathfrak{z}} \pm \sqrt{\bar{b}}\,\mathfrak{z}\right).$$

Pantazi-Paare sind auch hier wieder ausgezeichnet. Bei ihnen führt die Projektivität (39) jeden der Ausgangspunkte sogar in dritter Ordnung in einen Punkt der gegenüberliegenden Schmiegebene über.

Eine Überführung der beiden Kurven ineinander in höherer Ordnung tritt bei Pantazi-Paaren ein, falls eine oder mehrere der Bedingungen erfüllt sind:

$$(2.41)\qquad \left(\ln\frac{a}{\bar{a}}\right)' = 0, \quad \left(\ln\frac{b}{\bar{b}}\right)' = 0, \left(\ln\frac{A}{\bar{A}}\right)' = 0.$$

Gelten alle drei Relationen, so gehen die beiden Kurven durch Spiegelung an einem festen Geradenpaar auseinander hervor.

Spezielle Pantazi-Paare kann man also dadurch erzielen, daß man auf eine gegebene Kurve eine involutorische Projektivität anwendet.

18. Die Frage nach der Möglichkeit, zwei Kurven an einer bestimmten Stelle in einer gewissen Ordnung ineinander überführen zu können, hat in Sonderfällen Interesse, wenn etwa eine der beiden Kurven eben ist, d.h. z.B. $A = 0$. Insbesondere möchte man wissen, ob man zu einer gegebenen (gewundenen) Kurve eine punktweise auf sie bezogene ebene Kurve angeben kann, so daß an jeder Stelle eine „möglichst gut berührende" Projektivität beide Kurven aufeinander abbildet. Natürlich können wir diese Frage nur im Prinzip beantworten und aufzeigen, wie diese präzis lauten muß.

Von (39) ausgehend kann man verlangen, daß diese Projektivität an jeder Stelle die Punkte beider Kurven sogar in zweiter Ordnung vertauscht. Dies führt auf $\left(\ln\frac{a}{\bar{a}}\right)' = 0$. Eine weitere Bedingung läßt sich nun wegen $A = 0$ und der daraus folgenden Tatsache, daß immer

$h_1''', \bar{h}_1''' \neq 0$, nicht angeben, ohne bereits in den Ansatz eine Forderung an die gegenseitige Lage der beiden Kurven hineinzustecken. (Dies kann man auch nicht vermeiden, wenn man weitgehend auf Symmetrie verzichtet.) Wir können verlangen $h_2''' = 0$, woraus dann folgt

$$\left(\ln \frac{b}{\bar{b}}\right)' = 0.$$

Da jetzt auch $\bar{h}_2''' = h_3''' = \bar{h}_3''' = 0$, so heißt dies, $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ wird an jeder Stelle in dritter Ordnung zwar nicht in den gegenüberliegenden Punkt, aber doch in einen Punkt der Verbindungsgeraden mit diesem übergeführt.

(Die geometrische Charakterisierung der angegebenen Bedingungen ist natürlich von dem Verschwinden von A unabhängig.)

19. Korrelationen, die die Punkte der einen Kurve an einer Stelle in einer gewissen Ordnung auf die Schmiegebenenmannigfaltigkeit der anderen abbilden, kann man entsprechend definieren. Geht man wie bei den behandelten Korrelationen und Projektivitäten vor, so gelangt man wieder zu einer eindeutig bestimmten Korrelation

$$(2.42) \qquad a_0 = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{A}\,p_3, \qquad a_1 = \bar{b}\,p_2, \qquad a_2 = b\,p_1, \qquad a_3 = \frac{a\,b}{\bar{A}}\,p_0,$$

die die Berühr-C_3 (31) mit der dazu symmetrischen vertauscht.

Nur bei PANTAZI-Paaren führt diese Korrelation die Punkte $\mathfrak{r}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ sogar in dritter Ordnung in eine Ebene durch $\bar{\mathfrak{r}}$ bzw. $\mathfrak{r}$ über. „Berührung" in höherer Ordnung tritt weiterhin ein, wenn eine oder mehrere der Größen

$$(2.43) \qquad \left(\ln \frac{A}{\bar{a}}\right)', \qquad \left(\ln \frac{b}{\bar{b}}\right)', \qquad \left(\ln \frac{\bar{A}}{a}\right)'$$

verschwinden. Die Korrelation (42) ist fest, wenn bei einem PANTAZI-Paar alle die Größen (43) Null sind.

§ 3.

Kurvenpaare und Doppelverhältnisscharen.

Mit einem Kurvenpaar sind an einer Stelle die Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ und auch die Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$, $(\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{s})$ invariant verbunden. Jede dieser Geraden bildet längs des Kurvenpaares eine Regelfläche, deren Eigenschaften natürlich irgendwie auch für das Kurvenpaar charakteristisch sind. Wir wollen diesen Zusammenhang hier nicht bis in die Einzelheiten verfolgen, auch deshalb nicht, weil das geometrische Gebilde eines Kurvenpaares auf einer Regelfläche vom Gesichtspunkt der Theorie der Regelflächen aus in interessanter Weise gefaßt werden kann[11]). Trotzdem gibt es eine Reihe von Fragen, für die unsere Auffassung, d.h.

[11]) Vgl. G. BOL, Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen. Math. Z. **52**, 791—809 (1950).

unser Bezugssystem besonders geeignet ist — nur von diesen soll hier die Rede sein.

Wir betrachten etwa die Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und die sie berührenden Quadriken, die durch

$$f_1 = f_1' = \bar{f}_1 = \bar{f}_1' = f_4 = f_4' = 0 \tag{3.1}$$

gekennzeichnet sind, wobei $f_1, \bar{f}_1$ in (2.17) definiert wurde und

$$f_4 = \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle$$

gesetzt ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
f_1 &= \langle \mathfrak{r}, \mathfrak{r} \rangle \\
f_1' &= 2a \langle \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \rangle \\
f_1'' &\equiv 2a \left(a \langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s} \rangle + b \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle\right) \pmod{f_1, f_1'} \\
f_1''' &\equiv 2ab \left(\left(\ln \frac{b}{a}\right)' \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle + 3a \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle + A \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle\right) \pmod{f_1, f_1', f_1''}, \\
f_4 &= \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle \\
f_4' &= a \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle + \bar{a} \langle \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle \\
f_4'' &\equiv a \left(\left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)' \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{r}} \rangle + 2\bar{a} \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle\right) \pmod{f_4, f_4', f_1, \bar{f}_1'}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

und (1) führt also auf die Gleichungen dieser Quadriken in lokalen Koordinaten:

$$2a\, p_0 p_2 - 2\bar{a}\, p_1 p_3 + a_{11} p_1^2 + 2a_{12} p_1 p_2 + a_{22} p_2^2 = 0. \tag{3.3}$$

Jede solche Quadrik gibt in Verbindung mit dem Kurvenpaar Veranlassung zu einer projektiven Abbildung der Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ auf sich[12]). Schneiden wir nämlich eine Quadrik (3) mit den Schmiegebenen $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ von $\bar{\mathfrak{r}}$, so gibt es Geradenvierecke auf der Quadrik, deren Eckpunkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{p}}$ der Reihe nach auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, in $\mathfrak{R}$, in $\bar{\mathfrak{R}}$, auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ liegen (in der Figur gestrichelt). Die Zuordnung der Punkte $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ ist eine projektive. Setzen wir

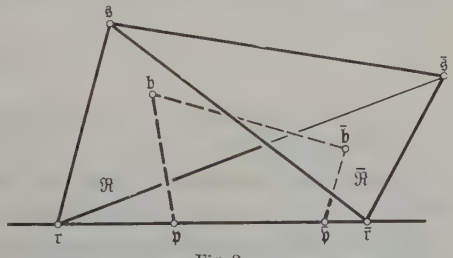

Fig. 2.

$$\mathfrak{p} = s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}, \qquad \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{r} + \bar{s}\,\bar{\mathfrak{r}} \tag{3.4}$$

und $\mathfrak{b}$ als Linearkombination von $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\bar{\mathfrak{s}}$ und entsprechend $\bar{\mathfrak{b}}$, so führen die Bedingungen

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{b}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{b}} \rangle = 0$$

[12]) Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der von G. Bol in der unter [11]) zitierten Arbeit eingeführten Grundabbildung.

auf

$$\mathfrak{b} = \tau\,\mathfrak{r} + s\,a\,\mathfrak{s} + \bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}$$

(3.5)

$$\bar{\mathfrak{b}} = \bar{\tau}\,\bar{\mathfrak{r}} + a\,\mathfrak{s} \quad + \bar{s}\,\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}\,.$$

wobei

$$-2\tau = \frac{\bar{a}}{a}\,a_{22} + 2s\,a_{12} + s^2\,\frac{a}{\bar{a}}\,a_{11}$$

$$2\bar{\tau} = \frac{a}{\bar{a}}\,a_{11} + 2\bar{s}\,a_{12} + \bar{s}^2\,\frac{\bar{a}}{a}\,a_{22}.$$

Zuletzt liefert

$$\langle \mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}} \rangle = 0$$

die gesuchte Projektivität:

$$s\,\frac{a}{\bar{a}}\,a_{11} + 2a_{12} + \bar{s}\,\frac{\bar{a}}{a}\,a_{22} = 0. \tag{3.6}$$

Wählt man für jede Erzeugende der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ eine Quadrik (3), so gibt es zu dieser Quadrik eine Kurvenschar auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, deren Tangenten den einen Regulus von (3) bilden. Wegen

$$\mathfrak{p}' = s'\,\mathfrak{r} + s\,a\,\mathfrak{s} + \bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}} \tag{3.7}$$

genügt nach (5) diese Schar der RICCATIschen Differentialgleichung

$$-2s' = \frac{\bar{a}}{a}\,a_{22} + 2s\,a_{12} + s^2\,\frac{a}{\bar{a}}\,a_{11}, \tag{3.8}$$

d.h. die Scharkurven bilden die Erzeugenden projektiv aufeinander ab — man spricht von einer Doppelverhältnisschar.

Dieser Zusammenhang zwischen berührenden Quadriken und Doppelverhältnisscharen ist wohlbekannt. Für uns hier handelt es sich jedoch darum, daß diese Gebilde auf ein bestimmtes Punktepaar $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ bezogen sind, und wir können sagen: *Nehmen wir zu den Invarianten des Kurvenpaares die Größen*

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{22} \tag{3.9}$$

hinzu, so ist damit neben unserem Kurvenpaar eine Doppelverhältnisschar (8) *und gleichbedeutend eine* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *an jeder Stelle berührende Quadrik* (3) *und damit eine projektive Abbildung von* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *auf sich auf jeder Erzeugenden definiert.* Diese so erzielbaren projektiven Abbildungen sind dabei unter allen möglichen dadurch ausgezeichnet, daß sie $\mathfrak{r}$ in $\bar{\mathfrak{r}}$ überführen.

Einem Punkte $s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}$ der Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ denken wir uns an jeder Stelle den Punkt $s\,a\,\mathfrak{s} + \bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}$ der Geraden $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ zugeordnet. Es trifft nämlich die Tangentenebene an die Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ im Punkte $s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}$ die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ in dem genannten Punkte. Beachten wir diese eindeutige Zuordnung der beiden Geraden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$, so gilt: Die Doppelpunkte der Abbildung (6) sind die Punkte der Erzeugenden $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, in denen die Tangenten hindurchgehender zugehörender Scharkurven (8)

die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ treffen. In diesen Punkten enthält also die zugehörende Quadrik (3) die Verbindungsgerade aufeinander bezogener Punkte von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$. Somit trifft insbesondere an diesen Stellen die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ die Quadrik (3).

Besonders wichtig ist natürlich der Fall, daß die Abbildung (6) involutorisch ist. Dieser ist durch $a_{12} = 0$ und die folgenden geometrischen Eigenschaften gekennzeichnet. Die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ werden durch (6) miteinander vertauscht, d.h. diese Ausgangspunkte liegen harmonisch zu den Doppelpunkten. Desgleichen trennen die Schnittpunkte der Quadrik (3) mit der Geraden $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ $\mathfrak{s}$ und $\bar{\mathfrak{s}}$ harmonisch. Die Zuordnung auf dieser Geraden wird jetzt auch durch die Polarität an (3) erzeugt. Ferner gibt es in diesem und nur in diesem Fall eine Berühr-C_3 (2.3) auf der Quadrik (3). Diese Berühr-C_3 ist eindeutig bestimmt, und umgekehrt gehört zu jeder Berühr-C_3 genau eine Quadrik (3) mit $a_{12} = 0$[13]). Die Beziehung wird vermittelt durch:

$$2a\,\alpha + a_{11} = 0, \qquad 2\bar{a}\,\bar{\alpha} - a_{22} = 0. \tag{3.10}$$

Ausgezeichnete Berühr-C_3 führen auf ausgezeichnete Quadriken (3) und damit auf ausgezeichnete Doppelverhältnisscharen (8) und ausgezeichnete Involutionen (6). — Wir wollen diese Zusammenhänge im einzelnen nicht verfolgen, sondern uns anderen, mit dem Kurvenpaar invariant verbundenen Gebilden zuwenden, die durch (9) definiert sind.

Da ist zunächst der Fall zu beachten, daß die soeben aufgeführten Zusammenhänge gegenstandslos werden, weil alle Größen (9) verschwinden. Diese Quadrik (3) hat die Gleichung

$$2a\,p_0\,p_2 - 2\bar{a}\,p_1\,p_3 = 0 \tag{3.11}$$

und ist unter den $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ berührenden Quadriken dadurch ausgezeichnet, daß die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ ganz auf ihr liegt. Sie berührt sogar die Kurven $\mathfrak{s}$ und $\bar{\mathfrak{s}}$, es ist ja

$$\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s} \rangle = \langle \mathfrak{s}, \mathfrak{s} \rangle' = \langle \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{s}}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle' = \langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle = 0,$$

jedoch dann und nur dann noch

$$\langle \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \rangle' = 0,$$

falls

$$A\,\bar{a} - \bar{A}\,a = 0,$$

d.h. falls das Kurvenpaar ein Pantazi-Paar ist. Pantazi-*Paare sind auch dadurch charakterisiert, daß sie an jeder Stelle eine Quadrik zulassen, die die beiden Regelflächen berühren, die von der Verbindungsgeraden ihrer Punkte und der Schnittgeraden ihrer Schmiegebenen erzeugt werden.*

[13]) Denkt man sich die Geraden der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ mittels der Kurvenschar $s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}$, $s = \text{const}$ aufeinander abgebildet, so definiert (6) und (8) jeweils eine „projektive Bewegung" in dem binären Gebiet. Ist $a_{12} = 0$, so ist diese Bewegung in verschiedener Weise ausgezeichnet. Auf diese Zusammenhänge gehen wir hier nicht ein.

Zu der Quadrik (11) gehört auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ die Kurvenschar $\mathfrak{r} + s\,\bar{\mathfrak{r}}$ mit $s = \text{const}$ und entsprechend auf $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ eine Kurvenschar, deren Tangenten zumindest die Gerade $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ treffen. Setzen wir

$$\mathfrak{q} = a\,\mathfrak{s} + u(t)\,\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}\,, \tag{3.12}$$

so wird

$$\mathfrak{q}' \equiv \left(u' + \frac{a\,b}{\bar{a}} + \left(\ln\frac{\bar{a}}{a}\right)' u - \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\,u^2\right)\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}} + a\,\bar{A}\,\mathfrak{r} + u\,\bar{a}\,A\,\bar{\mathfrak{r}} \pmod{\mathfrak{q}},$$

und es ist

$$\mathfrak{q}' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}},$$

falls

$$u' + \frac{a\,b}{\bar{a}} + \left(\ln\frac{\bar{a}}{a}\right)' u - \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\,u^2 = 0. \tag{3.13}$$

Zu der so bestimmten Doppelverhältnisschar auf $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ gehört die Quadrik

$$2A\,p_0\,p_2 - 2\bar{A}\,p_1\,p_3 = 0, \tag{3.14}$$

die im Falle eines Pantazi-Paares mit (11) zusammenfällt und allgemein die Eigenschaft hat, $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ zu berühren und $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ zu enthalten.

Gibt es auf der Regelfläche $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ eine Kurve, deren Schmiegebene an jeder Stelle durch die Gerade $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ geht? Eine solche Kurve gehört zu der Schar (12), (13), und wegen

$$\mathfrak{q}'' \equiv a\,\bar{A}\,a\,\mathfrak{s} + u\,\bar{a}\,A\,\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}} \pmod{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'}$$

existiert eine solche Kurve nur bei Pantazi-Paaren. Bei diesen hat aber jede Kurve der Schar diese Eigenschaft.

Die Figur, die bei Pantazi-Paaren hier vorliegt, die beiden Regelflächen $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ mit der an jeder Stelle berührenden Quadrik (11), (14) und den dazugehörenden Kurvenscharen, ist in bezug auf beide Regelflächen völlig symmetrisch, und keine Scharkurve ist vor den anderen ausgezeichnet. *Mit* $\mathfrak{r}$ *und* $\bar{\mathfrak{r}}$ *bildet also jedes andere Kurvenpaar der Schar* $s\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}$, $s = \text{const}$, *und jedes Kurvenpaar der Schar* (12), (13) *auf* $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ *ein* Pantazi-*Paar.*

Greifen wir aus der Doppelverhältnisschar auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und auf $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ jeweils eine Kurve heraus, etwa

$$\mathfrak{p}_0 = s_0\,\mathfrak{r} + \bar{\mathfrak{r}}, \qquad \mathfrak{q}_0 = a\,\mathfrak{s} + u_0(t)\,\bar{a}\,\bar{\mathfrak{s}}.$$

Ihre Schmiegebenen werden, wie wir soeben sahen, aufgespannt von den Punkten

$$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{q}_0, \mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}},$$

d.h. also von

$$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0, \mathfrak{s} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{q}_0, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{r}.$$

Diese Schmiegebenen enthalten also die Gerade $(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0)$. $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0$ *durchlaufen somit Asymptotenlinien der Regelfläche* $(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0)$. Wir können

unserem oben ausgesprochenen Satz auch die Form geben: *Zu einem Kurvenpaar* $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ *gibt es dann und nur dann eine weitere Kurve* $\mathfrak{t}$, *so daß die Kurven* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$ *bzw.* $\mathfrak{t}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ *Asymptotenlinien der Regelfläche* $(\mathfrak{r}, \mathfrak{t})$ *bzw.* $(\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{r}})$ *sind, falls das Kurvenpaar ein* Pantazi-*Paar ist.* In diesem Fall gibt es eine ganze Kurvenschar solcher Kurven $\mathfrak{t}$, die eine Doppelverhältnisschar einer Regelfläche bilden. Je zwei Kurven dieser Schar haben dieselbe Eigenschaft[14]).

Wir kommen zurück zum allgemeinen Fall der Quadriken (3), unter denen wir jetzt diejenigen auswählen, die das Kurvenpaar sogar dreipunktig berühren. Wir nennen diese *Berührquadriken von* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$. Die Bedingungen

$$f_1'' = \bar{f}_1'' = 0$$

führen nach (2) auf

$$a_{22} = \bar{b}, \qquad a_{11} = -b. \tag{3.15}$$

Zu diesen gehört auch die Schmiegquadrik der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, für die weiterhin $f_4'' = 0$, also

$$2a_{12} = \left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)'. \tag{3.16}$$

Als Doppelverhältnisschar ist der Schmiegquadrik die Schar der Asymptotenlinien zugeordnet.

Zu den Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *gehören genau die Kurvenscharen* (8), *deren Kurven auf jeder Erzeugenden Asymptotenlinien der Regelfläche* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *in den Punkten* $\mathfrak{r}$ *und* $\bar{\mathfrak{r}}$ *berühren.* Stellen nämlich, in denen die Kurven zweier Scharen sich berühren, berechnen sich allgemein aus der quadratischen Gleichung

$$\tau - \tau^* = 0,$$

und diese Punkte fallen genau dann in die Ausgangspunkte, falls

$$a_{11} - a_{11}^* = 0, \qquad a_{22} - a_{22}^* = 0. \tag{3.17}$$

Ist die eine Schar die Schar der Asymptotenlinien, so führt dies für die andere gerade auf (15).

Denken wir uns umgekehrt auf einer Regelfläche eine Doppelverhältnisschar gegeben, so gibt es auf jeder Erzeugenden genau zwei (im allgemeinen verschiedene) Punkte, in denen eine Kurve der Schar eine Asymptotenlinie berührt. Wählen wir diese so entstehenden Kurven als Ausgangskurven, so kommen wir auf die betrachtete Figur. *Nehmen wir zu den Invarianten des Kurvenpaares die Größe* a_{12} *hinzu, so haben wir*

[14]) $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{t}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ nennt man deshalb auch asymptotisch Transformierte erster Stufe voneinander, $\mathfrak{r}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ asymptotisch Transformierte zweiter Stufe. Wir haben den Ausdruck Pantazi-Paare der Kürze wegen gewählt, auch weil A. Pantazi es war, der den hier der Vollständigkeit halber angegebenen Zusammenhang in der S. 416, Fußnote [6]) zitierten Arbeit dargestellt hat. Die Kenntnis dieser Zusammenhänge ist vermutlich viel älter. Man vgl. etwa: G. Fubini-E. Čech, Geometria proiettiva differenziale I, II. — A. Terracini, Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari. Appendice IV[a] (Bologna 1927).

ein volles Invariantensystem einer Doppelverhältnisschar. Ausgeschlossen sind dabei Doppelverhältnisscharen, deren Kurven Asymptotenlinien auf der betrachteten Erzeugenden in zusammenfallenden Punkten berühren.

Unter den Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ gibt es weitere ausgezeichnete — wir stellen die folgende Liste zusammen:

$$
\begin{aligned}
a_{12} = \quad & 0: \text{ Berührquadrik von } (\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}) \text{ trägt 3-Punkte-} C_3 . \\
& \infty: \text{ Die beiden Ebenen } \mathfrak{E}, \bar{\mathfrak{E}}. \\
& \tfrac{1}{2}\left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)': \text{ Schmiegquadrik von } (\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}). \\
& \pm\sqrt{-b\,\bar{b}}: \text{ Berührquadriken von } (\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}), \text{ die } (\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}) \text{ berühren.} \\
(3.18) \quad & -\tfrac{1}{3}\left(\ln \frac{b}{a}\right)': \text{ Berührquadrik von } (\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}), \text{ die mit } \mathfrak{r} \text{ sogar vier} \\
& \qquad \text{aufeinanderfolgende Punkte gemeinsam hat.} \\
& \tfrac{1}{3}\left(\ln \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)': \text{ Berührquadrik, die } \bar{\mathfrak{r}} \text{ sogar vierpunktig berührt.} \\
& \left(\ln \frac{\bar{a}}{b}\right)': \mathfrak{r} \text{ ist Ort von Wendepunkten der zugehörigen Schar (8).} \\
& -\left(\ln \frac{a}{\bar{b}}\right)': \bar{\mathfrak{r}} \text{ ist Wendepunktsort der zugehörigen Schar (8).}
\end{aligned}
$$

Die Richtigkeit der ersten drei Behauptungen ist evident bzw. bewiesen. Um die Richtigkeit der vierten zu zeigen, hat man auszudrücken, daß die Doppelpunkte der Abbildung (6), (15) zusammenfallen. Die fünfte Aussage erhält man aus der Forderung $f_1''' = 0$ nach (2). Um die beiden letzten Bedingungen zu bestätigen, braucht man die Größe [vgl. (7)]:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}'' \equiv & \left\{s'' + s(a\bar{A} - \bar{a}A) - s'\left[(\ln \bar{a})' + s\frac{a\,b}{\bar{a}}\right]\right\}\mathfrak{r} + \\
& + \left\{2s' + \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a} + s\left(\ln \frac{a}{\bar{a}}\right)' - s^2\frac{a\,b}{\bar{a}}\right\} a\,\mathfrak{s} \pmod{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}.
\end{aligned}
$$

Ein Wendepunkt einer Scharkurve wird durch

$$\mathfrak{p}'' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'} \tag{3.19}$$

gekennzeichnet, wenn dabei $s(t)$ der Differentialgleichung (8) mit (15) genügt. $\bar{\mathfrak{r}}$ selbst ist Wendepunkt der hindurchlaufenden Scharkurve, wenn (19) für $s = 0$ erfüllt ist. Dies führt auf

$$s'' - s'(\ln \bar{a})' = 0, \qquad 2s' + \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a} = 0,$$

wobei sich s'' aus (8) mit (15) zu

$$2s'' + \left(\frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\right)' + 2a_{12}s' = 0$$

berechnet. Elimination von s'' und s' aus diesen Gleichungen führt auf den in der Liste (18) an letzter Stelle angegebenen Wert von a_{12}.

Wählt man unter (18) etwa die Quadriken mit a_{12}: $0, \infty, \sqrt{-b\,\bar{b}}$ als Grundelemente aus, so ist für jede weitere Quadrik des Büschels das

Doppelverhältnis

$$D\left(0, \infty, a_{12}, \sqrt{-b\,\bar{b}}\right) = \frac{a_{12}}{\sqrt{-b\,\bar{b}}}. \tag{3.20}$$

Insbesondere ergibt sich so eine geometrische Deutung der Invarianten

$$\frac{\left(\ln \frac{\bar{a}}{a}\right)'}{2\sqrt{-b\,\bar{b}}}, \qquad \frac{-\left(\ln \frac{b}{a}\right)'}{3\sqrt{-b\,\bar{b}}}, \qquad \frac{\left(\ln \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)'}{3\sqrt{-b\,\bar{b}}}. \tag{3.21}$$

Eine weitere Deutung dieser Größen, die nur reelle Gebilde benützt, erzielt man mittels der Projektivitäten (6), die den Punkt $\mathfrak{r}$ in $\bar{\mathfrak{r}}$ überführen. Es gibt also einen Punkt $\mathfrak{a}_1$, der das Bild von $\bar{\mathfrak{r}}$ ist, und einen Punkt $\mathfrak{a}_2$, der auf $\mathfrak{r}$ abgebildet wird. Das Doppelverhältnis der vier Punkte $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ hat nach (6) den Wert

$$D(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = -\frac{4a_{12}^2}{b\,\bar{b}}. \tag{3.22}$$

Insbesondere hat dieses Doppelverhältnis genau dann den Wert 4, wenn die zugehörige Quadrik die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ berührt.

In (21) *ist zusammen mit* (2.10) *die geometrische Deutung eines vollen Invariantensystems eines Kurvenpaares enthalten.*

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ mit dem Kurvenpaar $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$. Andererseits wird dieselbe Regelfläche auch erzeugt von den Schnittgeraden der Ebenen $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$, wobei jetzt die Ebenenscharen $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$ durch das Kurvenpaar ausgezeichnet sind. Die geometrischen Überlegungen dieses Abschnitts lassen sich hierauf übertragen. Die $(\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}})$ berührenden Quadriken (als Ebenenmannigfaltigkeit) hüllen natürlich wieder die Quadriken (3) ein, und auch die Berührquadriken von $(\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}})$ — die definitionsgemäß mit $\mathfrak{S}$ und $\bar{\mathfrak{S}}$ drei aufeinanderfolgende Ebenen gemeinsam haben — bilden die Tangentenebenenmannigfaltigkeiten der Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$. Dies leuchtet ein, da bei der Auszeichnung dieser Quadriken die in sich dualen Asymptotenlinien eine Rolle spielten.

Darüber hinaus zeigt die Rechnung, die wir hier nicht durchführen, daß zu den ausgezeichneten Berührquadriken von $(\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}})$ als Punktgebilde gerade wieder die Quadriken (3) mit den Werten (15), (18) gehören, so daß also z. B. gilt: *Eine Berührquadrik von* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, *die vier Punkte mit* $\mathfrak{r}$ *gemein hat, hat auch vier aufeinanderfolgende Ebenen mit* $\mathfrak{S}$ *gemeinsam* usw.

Diese Gegebenheiten in Verbindung mit der Liste (18) liefern eine Reihe geometrischer Aussagen, unter denen wir die folgenden Beispiele auswählen:

Hat die Schmiegquadrik einer Regelfläche vier Punkte mit einer Kurve auf der Regelfläche gemeinsam, so berührt sie auch vier aufeinanderfolgende Ebenen, die durch die Tangente an die Kurve und die Erzeugende bestimmt sind, — diese Kurve ist Fleknodalkurve. $\mathfrak{r}$ *wird durch*

$$\left(\ln \frac{a\,b^2}{\bar{a}^3}\right)' = 0 \tag{3.23}$$

als Fleknodalkurve gekennzeichnet.

Eine 4-Punkte-Berührquadrik von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *hat auch mit* $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$ *vier Ebenen gemeinsam, kurz gesagt, sie berührt den Streifen* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{S}$ *(bzw.* $\bar{\mathfrak{r}}$, $\bar{\mathfrak{S}}$*) vierfach. Dies ist genau dann der Fall, wenn* $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ *Wendepunktsorte der zugehörigen Kurvenscharen* (8) *durchlaufen*[15]*. Die analytische Bedingung hierfür lautet:*

$$\left(\ln \frac{a\,\bar{a}}{b\,\bar{b}}\right)' = 0. \tag{3.24}$$

Wir wissen nun auch schon viel über die berührenden Quadriken von $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$. Diese werden ja eingehüllt von den berührenden Quadriken von $(\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{R}})$. Formale Dualisation der Betrachtungen und Formeln dieses Abschnitts führt also auf diese Gebilde, über die wir hier deshalb nicht weiter sprechen wollen. Man gewinnt so auch den Zusammenhang zu den Kurvenpaaren $\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}}$ bzw. $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$, deren Untersuchung als selbständige Kurvenpaare auch Rückschlüsse auf das Ausgangspaar zuließen (vgl. Bemerkung 12).

Wir wollen zum Abschluß noch angeben, in welcher Weise die begonnene Theorie weitergeführt werden kann. Die Begleitfiguren haben wir hier nur in ihren lokalen Eigenschaften untersucht. Sie bilden jedoch längs des Kurvenpaares je nachdem Hüllflächen, Geradenkongruenzen, die wieder Brennflächen haben, insbesondere erzeugen die Berühr-C_3 Flächen längs des Kurvenpaares. Insofern gibt die vorliegende Theorie eine Basis für die Behandlung solcher C_3-Flächen, deren erzeugende Kurven dritter Ordnung zwei singuläre Kurven einhüllen. Hierauf kommen wir vielleicht an anderer Stelle zurück.

Aber auch überall dort, wo ein geometrisches Problem ein Kurvenpaar auszeichnet, ist die vorliegende Theorie mit Erfolg anzuwenden. Es wäre deshalb wertvoll, die Beziehungen zu der Theorie der Regelflächen (definiert durch ihre nicht zusammenfallenden Fleknodalkurven) und zu der Theorie der Doppelverhältnisscharen auf einer Regelfläche[16]) herzustellen.

Bemerkungen. 1. Durch (10) werden auch im Falle $a_{12} \neq 0$ Berühr-C_3 und Quadriken (3) dadurch einander zugeordnet, daß sie sich nicht nur zwei-, sondern dreipunktig berühren. Zu einer Berühr-C_3 gehört so ein Quadrikbüschel — und damit ein Büschel der durch (9) gekennzeichneten geometrischen Gebilde — für die

$$a_{11},\quad a_{22} \quad \text{fest, und} \quad a_{12} \tag{3.25}$$

projektiver Parameter ist. Zum gleichen Büschel gelangen wir, wenn wir uns ein Element dieses Büschels fixiert denken und die zugehörige Doppelverhältnisschar (8) betrachten. Eine beliebige Kurvenschar (8), deren Kurven die Kurven der festgewählten Schar in den Ausgangspunkten berühren [vgl. (17)], führt ebenfalls auf ein Element des genannten Büschels und alle Elemente haben diese Eigenschaft.

[15]) Die Kurvenschar besteht dann wieder aus PANTAZI-Paaren.

[16]) Vgl. auch Fußnote [11]) auf S. 428.

Die Invarianten a_{11}, a_{22} kann man wegen (10) mit α und $\bar{\alpha}$ im Büschel der Berührkegel von $\bar{\mathfrak{r}}$ bzw. von $\mathfrak{r}$ deuten. Wählt man außer den ausgearteten Elementen unter den Berührkegeln von $\bar{\mathfrak{r}}$ etwa noch den Schmiegkegel bezüglich des Paares, so hat für jeden anderen Kegel des Büschels das entstehende Doppelverhältnis den Wert

$$\frac{2a\alpha}{b}, \text{ also auch den Wert } -\frac{a_{11}}{b},$$

wenn (10) gilt.

2. In einem Büschel (25) gibt es genau ein Element, dessen zugehörige Abbildung (6) eine Involution ist, nämlich wenn $a_{12}=0$. Diese Involution

$$s+\frac{\bar{a}^2 a_{22}}{a^2 a_{11}}\bar{s}=0 \tag{3.26}$$

hat somit für das Büschel und jedes Element dieses Büschels geometrische Bedeutung.

Ihre Doppelpunkte nennen wir *Medianpunkte des Kurvenpaares bezüglich des Büschels* oder auch *bezüglich eines Elements dieses Büschels.*

Das Büschel der Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ definiert ein Beispiel einer solchen linearen Mannigfaltigkeit (25). Diese ist aber invariant mit dem Kurvenpaar verbunden — die Doppelpunkte der zugehörigen Involution mögen einfach *Medianpunkte des Kurvenpaares* heißen.

Wichtig für diese Zusammenhänge ist natürlich, daß ein beliebig herausgegriffenes Gebilde (9) und ein Kurvenpaar nach Bemerkung 1 immer genau ein Büschel (25) festlegt und damit auch die zugehörigen Medianpunkte. Diese durchlaufen auf der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ die *Mediankurven* des Kurvenpaares bezüglich des Gebildes (9), von dem wir ausgingen.

3. Ziehen wir noch die Berührprojektivitäten (vgl. § 2 Bemerkung 17) heran, um einen tieferen Einblick in die geometrischen Zusammenhänge zu gewinnen! Es gilt: *Die Spiegelgeraden* (2.40) *schneiden in* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *die Medianpunkte des Kurvenpaares aus, die Involution* (26) *auf* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ *wird durch die Projektivität* (2.39) *erzeugt*, durch eine Projektivität also, die die Punkte des Kurvenpaares in höchstmöglicher Ordnung miteinander vertauscht.

Wir erläutern die Verhältnisse gleich am allgemeinen Büschel (25) von Gebilden (9). Wir betrachten zunächst die Berührprojektivitäten, die die Punkte der Kurven $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ an jeder Stelle sogar in erster Ordnung vertauschen. Diese lineare Gesamtheit besteht wieder aus lauter involutorischen Projektivitäten

$$p_0^* = \bar{a}^2\,\bar{\lambda}\,p_3, \qquad p_1^* = a\,\bar{a}\,\bar{\lambda}\,p_2, \qquad p_2^* = a\,\bar{a}\,\lambda\,p_1, \qquad p_3^* = a^2\,\lambda\,p_0 \tag{3.27}$$

mit den Spiegelgeraden

$$\left(\bar{a}\sqrt{\bar{\lambda}}\,\mathfrak{r} \pm a\sqrt{\lambda}\,\bar{\mathfrak{r}},\ \sqrt{\bar{\lambda}}\,\mathfrak{s} \pm \sqrt{\lambda}\,\bar{\mathfrak{s}}\right). \tag{3.28}$$

(27) führt eine Berühr-C_3 in sich über, für die

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \frac{2\bar{\alpha}\,\bar{a}}{2\alpha\,a},$$

Mit

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = -\frac{a_{22}}{a_{11}}$$

bildet (27) die Quadriken (3) des Büschels (25) auf Quadriken desselben Büschels ab.

Es folgt: *Eine Projektivität* (27), *die die zu* (25) *gehörende Berühr-C_3 oder das zu* (25) *gehörende Büschel von Quadriken in sich überführt, ist eindeutig bestimmt und definiert die Medianpunkte des Kurvenpaares bezüglich* (25) *als Schnitt der Spiegelgeraden mit* $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$.

Zu den in (27) sich entsprechenden Quadriken des Büschels $(a_{12}, -a_{12})$ gehören Doppelverhältnisscharen derart, daß die Kurven der einen Schar die Kurven der konjugierten der anderen Schar in den Medianpunkten berühren. Damit analytisch äquivalent ist die namengebende Definition der Mediankurven: Sie berühren auf jeder Erzeugenden Scharkurven in zwei Punkten, die harmonisch zu den Punkten des Kurvenpaares liegen[17]).

Die Quadrik in (25), auf der die Berühr-C_3 liegt (d.h. $a_{12} = 0$), wird von (27) in sich übergeführt, und zwar geradenweise, so daß Geraden, die mit $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ in einer Schar liegen, in sich abgebildet werden. Die Involution (26) entsteht somit auch dadurch, daß man auf dieser Quadrik Geradenvierecke betrachtet, deren weitere Ecken auf der Berühr-C_3 liegen. (27) wird dann als involutorische Projektivität dadurch bestimmt, daß sie die entstehenden Geradenvierecke auf sich abbildet.

4. Bei geeigneter Wahl des speziellen projektiven Parameters kann man den Kurven dritter Ordnung, die jede Kurve des Paares zweipunktig berühren, die Gestalt geben:

$$\bar{\mathfrak{y}}(s) = (\alpha_0 + s\,\alpha_1)\,\mathfrak{r} + s\,\hat{s} + s^2\,\bar{\hat{s}} + (\bar{\alpha}_1 s^2 + \bar{\alpha}_0 s^3)\,\bar{\mathfrak{r}}.$$

Auf einer Quadrik (3) liegt ein einparametriges System solcher 2-Punkte-C_3 mit:

$$2a\,\alpha_0 + a_{11} = 0, \qquad -2\bar{a}\,\bar{\alpha}_0 + a_{22} = 0, \qquad 2a\,\alpha_1 - 2\bar{a}\,\bar{\alpha}_1 + 2a_{12} = 0.$$

Es gilt nun: Geradenvierecke auf der Quadrik (3), deren Ecken außer auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ auf einer der 2-Punkte-C_3 liegen, definieren auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ gerade wieder die Involution (26), deren Fixpunkte die zugehörigen Medianpunkte sind.

[17]) Auf diese und ähnliche Zusammenhänge gehen wir hier absichtlich nicht ein. Es handelt sich dabei um eine „innere" Eigenschaft der Doppelverhältnisschar mit dem Kurvenpaar, die völlig davon absieht, daß sich dieses Gebilde auf einer Regelfläche befindet. Über die inneren Eigenschaften gewinnt man am besten einen Überblick mittels der von Hesse eingeführten hyperbolischen Abbildung: Die Doppelverhältnisschar definiert ein binäres Gebiet, gedeutet als Kegelschnitt einer Hilfsebene. Dem Kurvenpaar entsprechen zwei Punkte dieses Kegelschnitts, die sich in Abhängigkeit von t auf diesem bewegen (vgl. hierzu die auf S. 428, Fußnote [11]) zitierte Arbeit von G. Bol). — Uns kam es hier darauf an, einige „äußere" Eigenschaften der Medianpunkte und der harmonischen Punkte anzugeben, Eigenschaften also, die von der Lage auf der Regelfläche und dieser im Raum bestimmt sind.

5. Man kann nun fragen, ob es außer den Berührprojektivitäten (27) — die nach Voraussetzung die Punkte des Paares sogar in erster Ordnung vertauschen — noch andere gibt, die ein zu (25) gehöriges Büschel von Quadriken (3) auf sich abbilden. Dies leisten auch die Spiegelungen an dem Geradenpaar

$$(\bar{a}\sqrt{\bar{\mu}}\,\mathfrak{r} \mp a\sqrt{\mu}\,\bar{\mathfrak{r}}, \qquad \sqrt{\bar{\mu}}\,\mathfrak{s} \pm \sqrt{\mu}\,\bar{\mathfrak{s}}), \tag{3.29}$$

und zwar in der Weise, daß jede Quadrik des Büschels in sich selbst übergeführt wird, wobei:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

Spiegelung an (29) läßt die Berühr-C_3

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = -\frac{2\bar{a}\,\bar{\alpha}}{2a\,\alpha}$$

fest, insbesondere also auch die zum Büschel gehörende Berühr-C_3 (10). Die Geraden (29) schneiden auf $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ das Punktepaar

$$s^2 - \frac{\bar{a}^2 a_{22}}{a^2 a_{11}} = 0$$

aus. Dieses ist auch dadurch bestimmt, daß es die Medianpunkte bezüglich (25) und die Punkte $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ harmonisch trennt und die von ihm durchlaufenen Kurven werden deshalb *harmonische Kurven* genannt. Unsere Charakterisierung der harmonischen Kurven setzt ihre direkte Beziehung zu dem Büschel (25) in Evidenz.

Die Elemente des Büschels von Projektivitäten (27) und die hier betrachteten stehen übrigens mit

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \frac{\bar{\mu}}{\mu}$$

in der Beziehung, daß zusammengehörende Spiegelgeraden mit $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ die Seiten eines Tetraeders bilden, d.h. die einen die Diagonalen des Vierseits des anderen sind, wobei natürlich $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ immer als Seiten fungieren.

6. Es gibt ein Element des Büschels (25), dessen zugehörige Doppelverhältnisschar die Mediankurven als Scharkurven enthält. Es ist für dieses:

$$2a_{12} = \left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right)'.$$

Wir müssen also unsere Liste (18) durch

$$2a_{12} = \left(\ln \frac{a^2 b}{\bar{a}^2 \bar{b}}\right)' \tag{3.30}$$

ergänzen: Die Doppelverhältnisschar (8) mit (15) und (30) enthält ihre Mediankurven als Scharkurven. Die Mediankurven sind insbesondere Asymptotenlinien, wenn:

$$\left(\ln \frac{a\,b}{\bar{a}\,\bar{b}}\right)' = 0. \tag{3.31}$$

Andererseits drückt

$$\left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right)' = 0 \tag{3.32}$$

aus, daß die Mediankurven eines Büschels (25) der ausgezeichneten Schar mit $a_{12} = 0$ angehören. (32) bedeutet aber auch, daß die Tangenten der Mediankurven und der harmonischen Kurven die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ treffen. Hat eine dieser vier Kurven diese Eigenschaft, so auch die anderen.

Durchlaufen die Mediankurven des Ausgangspaares Asymptotenlinien und treffen ihre Tangenten die Gerade $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$, so gelten die ersten beiden Bedingungen (2.41). Dort sahen wir, daß in diesem Fall die Projektivität (2,39) die Punkte des Paares in zweiter Ordnung ineinander überführt und sie sogar in dritter Ordnung auf ihre Verbindungsgerade abbildet. Insbesondere ist dann auch $a = \text{const}\, \bar{a}$, d.h. die Schmiegquadrik ist ausgezeichnete Quadrik im Büschel der Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und wird durch (2.39) in sich übergeführt.

7. Kann eine der beiden Spiegelgeraden (28) eine Torse beschreiben? Dies ist in einem der beiden folgenden Fälle möglich:

a) Der Schnittpunkt dieser Spiegelgeraden mit $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, das ist ein Medianpunkt, beschreibt eine Kurve, deren Tangente $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ trifft, d.h. es gilt (32).

b) Der Schnittpunkt der Spiegelgeraden mit $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ beschreibt eine Kurve, deren Tangente $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ trifft. Dieser Schnittpunkt ist im allgemeinen jedoch nicht Kehlpunkt der Torse, dies ist den PANTAZI-Paaren vorbehalten. Die zweite Spiegelgerade beschreibt hier sicher keine Torse, wenn es sich nicht um die Spiegelgeraden (2.40) handelt, die zu den Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ gehören. In diesem Fall durchläuft mit einer auch die andere Spiegelgerade eine Torse, nämlich falls $b = \text{const}\, \bar{b}$ ist.

8. Das Doppelverhältnis (20) bzw. (22) kann man mit der gleichen geometrischen Bedeutung in jedem Gebilde (9) definieren. (22) hängt mit dem Doppelverhältnis B, das die Doppelpunkte der Abbildung (6) mit $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ bilden, zusammen durch

$$2 + B + \frac{1}{B} = \frac{4 a_{12}^2}{a_{11} a_{22}}. \tag{3.33}$$

In einem Büschel (25) werden durch Vorgabe von B zwei Elemente ausgesondert, deren Quadriken (3) durch Spiegelung an (28) ineinander übergehen.

Die Elemente, für die beide Seiten von (33) konstant sind, spielen in Büscheln (25) eine besondere Rolle, in denen die Spiegelgeraden die Tangenten an die Mediankurven sind, d.h. (32) gilt. In diesem Fall sind die Koeffizienten in (6) bzw. (8) bis auf konstante Faktoren einander gleich und es folgt z.B.: Die Doppelpunkte der Abbildung (6) beschreiben Kurven, deren Tangenten $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ treffen. Diese Kurven gehören auch der zugehörigen Doppelverhältnisschar (8) an usw.

Ist das Ausgangspaar Fleknodalpaar der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, so hat das Büschel der Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ immer die Eigenschaft (32) [vgl. (23)]. Ist nun etwa (33) mit (15) für die Asymptotenlinien konstant

so haben wir eine spezielle Klasse von Regelflächen vor uns. G. Bol nennt sie Kreisregelflächen und gibt eine Reihe geometrischer Eigenschaften an[18]).

Hierunter fallen die Komplexregelflächen mit

$$a = c_1 \bar{a} = c_2 b = c_3 \bar{b}, \qquad c_i = \text{const}, \tag{3.34}$$

die also etwa dadurch gekennzeichnet sind, daß die 3-Punkte-C_3 des Fleknodalpaares auf der Schmiegquadrik liegt usw.

Übrigens gelangt man auf diese Weise an Hand der Liste (18) nicht zu weiteren speziellen Regelflächenklassen. Für Fleknodalpaare fallen die dort aufgezählten Gebilde zusammen. Diese Tatsache kennzeichnet gerade die Fleknodalpaare in verschiedener Weise.

9. Betrachten wir zwei Gebilde (9) eines Büschels (25) mit $a_{12}, \bar{a}_{12}$. Die Doppelverhältnisschar (8), die zum ersten Element gehört, wird von der Abbildung (6) des zweiten Elements übergeführt in eine Doppelverhältnisschar (8) mit:

$$\begin{aligned} a_{11}^* &= a_{11} + \frac{4\bar{a}_{12}}{a_{22}}\left\{-a_{12} + \bar{a}_{12} + \left(\ln \frac{a\, a_{11}}{\bar{a}\, \bar{a}_{12}}\right)'\right\} \\ a_{12}^* &= -a_{12} + 2\bar{a}_{12} + \left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right)' \\ a_{22}^* &= a_{22}. \end{aligned}$$

Dies ist sicher dann ein Element des Büschels, wenn die angewandte Abbildung eine Involution ist. Dann ist

$$a_{12}^* = -a_{12} + \left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right)',$$

und es entsteht so eine Abbildung des Büschels in sich, die involutorisch ist, wenn (32) gilt, und dann auch durch die Spiegelung (27) erzeugt wird.

Andererseits führt eine Abbildung die zugehörige Doppelverhältnisschar ($a_{12} = \bar{a}_{12}$) in ein Element von (8) mit $a_{12}^* = 0$ über, falls

$$a_{12} + \left(\ln \frac{a^2 a_{11}}{\bar{a}^2 a_{22}}\right)' = 0$$

(vgl. Bemerkung 6), in ein Element des Büschels (25), falls

$$\bar{a}_{12} = \text{const}\, \frac{a}{\bar{a}}\, a_{11},$$

und letzten Endes in sich selbst, wenn (32) gilt und B in (33) konstant ist. Durch diese Eigenschaft sind also die in Bemerkung 8 genannten speziellen Gebilde (9) ebenfalls ausgezeichnet.

10. Bei Pantazi-Paaren hüllen die Quadriken (11) außer $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ und $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ zwei weitere Gerade ein. In diesem Geradenpaar schneiden sich die Schmiegquadrik von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, die Schmiegquadrik von $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{s}})$ und die Quadrik (11). Diese Geraden bestimmen also die Doppelpunkte der Abbildung (6) mit (15) und (16).

[18]) Vgl. Fußnote [11]) und [17]), S. 428 bzw. 438. Der Name rührt daher, daß das hyperbolische Bild des Fleknodalpaares in diesem Fall ein Kreis ist, wenn man es in der Doppelverhältnisschar der Asymptotenlinien betrachtet.

11. Die Fleknodalkurven der Regelfläche $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$ berechnen sich aus

$$\frac{\bar{a}\,\bar{b}}{a}\left(\ln\frac{\bar{a}\,\bar{b}^2}{a^3}\right)' + s\left\{E\left(\ln\frac{E^2}{a\,\bar{a}}\right)' - 4(a\bar{A} - \bar{a}A)\right\} - \frac{a\,b}{\bar{a}}\left(\ln\frac{a\,b^2}{\bar{a}^3}\right)' s^2 = 0$$

$$\text{mit} \quad E = \left(\ln\frac{a}{\bar{a}}\right)'.$$

Hieraus folgt z.B., daß die Fleknodalkurven die Kurven eines PANTAZI-Paares harmonisch trennen, wenn dessen 3-Punkte-C_3 auf der Schmiegquadrik liegt. Die 3-Punkte-C_3 eines Kurvenpaares, dessen Verbindungsgerade eine Fläche zweiter Ordnung erzeugen, liegt im allgemeinen nicht auf dieser Quadrik. Ist dies der Fall, so ist das Kurvenpaar ein PANTAZI-Paar.

12. Das Vorzeichen von $b\bar{b}$ ist invariant sowohl bei Parametertransformation als auch bei Umnormungen (1.4). Nach (18) hat man die geometrische Bedeutung: Je nachdem ob $b\bar{b} < 0$ oder $bb > 0$, gibt es an jeder Stelle des betrachteten wendepunktfreien Kurvenpaarstücks zwei reelle Berührquadriken von $(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})$, die $(\hat{\mathfrak{r}}, \bar{\hat{\mathfrak{r}}})$ berühren — oder nicht.

Es wäre, um bei reellen Größen zu bleiben, zweckmäßig je nachdem durch $b\bar{b} = \pm 1$ einen invarianten Parameter festzulegen.

Beim Übergang zu dem Kurvenpaar $\hat{\mathfrak{r}}, \bar{\hat{\mathfrak{r}}}$ bzw. auch zu $\mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}$ bleibt die Größe $b\bar{b}$[19]) *ungeändert.* Bezeichnen wir die Invarianten des Kurvenpaares $\hat{\mathfrak{r}}, \bar{\hat{\mathfrak{r}}}$ mit einem $\hat{}$, so gilt nämlich:

$$\left(\ln\frac{\hat{a}}{\hat{b}}\right)' = \left(\ln\frac{b}{A}\right)', \qquad \left(\ln\frac{\hat{\bar{a}}}{\hat{b}}\right)' = \left(\ln\frac{\bar{b}}{\bar{A}}\right)'$$

$$\left(\ln\frac{\hat{a}}{\hat{\bar{a}}}\right)' = 3\left(\ln\frac{\bar{A}}{A}\right)' + 2\left(\ln\frac{\bar{b}}{b}\right)', \qquad \hat{b}\,\hat{\bar{b}} = b\,\bar{b}$$

$$\hat{a}\,\hat{\bar{A}} = a\,\bar{A} + d' - d^2 - d\,(\ln\bar{A})' \quad \text{mit} \quad d = \left(\ln\frac{\bar{b}}{A}\right)'$$

$$\hat{\bar{a}}\,\hat{A} = \bar{a}\,A + \bar{d}' - \bar{d}^2 - \bar{d}\,(\ln A)' \quad \text{mit} \quad \bar{d} = \left(\ln\frac{b}{\bar{A}}\right)'.$$

[19]) Eigenartigerweise fällt die Größe $b\bar{b}$ auch zusammen mit der Größe $c_1 c_2$ in der BOLSchen Theorie [vgl. Fußnote [11]), S. 428]. Der von uns eingeführte invariante Parameter ist also im wesentlichen die Bogenlänge des hyperbolischen Bildes des Kurvenpaares in der Doppelverhältnisschar der Asymptotenlinien [Fußnote [17]), S. 438].

(Eingegangen am 21. März 1952.)

Errata

in der Arbeit von H. Weyl auf S. 105—119 dieses Bandes.

1. In Fußnote [2]), S. 105, ersetze **55** durch **56**.
2. In Formel (10) unten auf S. 109 ersetze die einfachen durch doppelte Vertikalstriche.
3. Auf S. 117, Zeile 18, lies „nicht verschwindet" statt „verschwindet".

Der Kreisel

Seine Theorie und seine Anwendungen

Von

Dr. **R. Grammel**

o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart

Zweite, neubearbeitete Auflage

Erster Band:

Die Theorie des Kreisels

Mit 137 Abbildungen. XI, 281 Seiten. 1950. DM 30.—; Ganzleinen DM 33.—

Zweiter Band:

Die Anwendungen des Kreisels

Mit 133 Abbildungen. VI, 268 Seiten. 1950. DM 30.—; Ganzleinen DM 33.—

Aus den Besprechungen.

Das Werk stellt in seiner neuen Auflage nach Inhalt und Form eine sehr weitgehende Neuschöpfung dar, deren Eigenart in einer kurzen Besprechung nur sehr unvollkommen gekennzeichnet werden kann. Besonders hervorzuheben ist der neu gestaltete Aufbau von den Grundlagen der Dynamik aus und die erzielte Klarheit und Anschaulichkeit des gesamten ausgedehnten Stoffgebietes, bei der in vielen Einzelheiten neue Gesichtspunkte und Zusammenhänge zum Ausdruck kommen. Ist es schon ein Beweis hoher Kunst, den großen Stoff in dieser Vollständigkeit in zwei schlanken Bänden unterzubringen, so muß auch auf die Art der Darstellung, die Diskussion der erhaltenen Ergebnisse und deren Veranschaulichung durch Schaubilder und Kurventafeln besonders hingewiesen werden ... Auch auf die Terminologie erstreckt sich die Neufassung des großangelegten Werkes, in die durch die Vorschläge des Verfassers eine logisch strengere Ordnung gebracht werden soll. Als wichtigste Einführung wird hierbei die Verwendung des Begriffes der *Drehkraft* als Oberbegriff gegenüber dem viel spezielleren Begriff des Kräftepaares empfohlen und verwendet, ferner Drehmasse statt Trägheitsmoment und Drehimpuls statt Schwung oder Drall. *Professor Pöschl-Karlsruhe, in „Archiv der Mathematik"*

... Klar, anschaulich und doch kompromißlos streng geschrieben, im Theoretischen bis zu den bekannten Lösungen führend und ebenso gründlich in der Behandlung der technischen Probleme, dürfte dieses Werk auf längere Zeit *das* Lehrbuch vom Kreisel werden. *„Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik"*

... The book can be recommended as an introduction to the subject for the potential designer and as a useful addition to the library shelf. It is, of course, biased somewhat towards the products of the author's own country, but there are adequate references to other sources of information ... *„Proceedings of the Physical Society"*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Physikalisches Wörterbuch

Herausgegeben von

Professor **Wilhelm H. Westphal**
Berlin

Zwei Teile in einem Band

Mit etwa 10500 Stichwörtern und 1595 Textfiguren

VI, 1628 Seiten. 1952

Halbfranz. DM 148.—

Inhaltsübersicht.

Erster Teil: Stichwörter A—L. Zweiter Teil: Stichwörter M—Z. — Geschichte der Physik. — Lebensdaten der Physiker. — Tabellen. — Nachträge.

Aus den Besprechungen.

Das von BERLINER und SCHEEL begonnene Wörterbuch ist seit vielen Jahren vergriffen. Die zuletzt erschienene 2. Auflage wurde 1922 herausgegeben. In den beiden verflossenen Jahrzehnten hat die Physik wesentliche, teilweise umwälzende Erkenntnisse gezeigt, man denke nur an die Physik der Atomkerne oder des Weltalls. Unter der Redaktion von Prof. WESTPHAL (Berlin) gelang es den 80 Mitarbeitern eine Übersicht der Grundlagen der Physik zusammenzustellen, in der auch die Astrophysik, Geophysik, Biophysik und die Mathematik vertreten ist. Die 10500 Stichworte mit etwa 1800 Abbildungen werden manchen Blick in das zuständige Lehrbuch ersparen. Gerade die Gebiete, die ein besonderes Spezialwissen voraussetzen, werden eingehend behandelt, so daß der Nichtspezialist eine Basis zur Verfügung hat, von der er ausgehen kann. Die zitierten Literaturstellen werden ihm das weitere Studium erleichtern. Das neue Wörterbuch dürfte damit in seiner Anlage für einen sehr weiten Leserkreis von Interesse sein und nicht zuletzt soll auf den angefügten kurzen Abriß der Geschichte der Physik, sowie einer Liste der Lebensdaten von etwa 875 Physikern hingewiesen werden.

„Naturwissenschaftliche Rundschau"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.